

Euler Bernoulli ve Timoshenko Kiriş Teorilerine Dayalı Eksenel Yönde Fonksiyonel Derecelenmiş Kolonların Burkulma Analizi

Burkay SİVRİ*¹ ORCID 0000-0002-1350-9493
Beytullah TEMEL¹ ORCID 0000-0002-1673-280X

¹Çukurova Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Adana

Geliş tarihi: 27.10.2021

Kabul tarihi: 30.06.2022

Atıf şekli/ How to cite: SİVRİ, B., TEMEL, B., (2022). Euler Bernoulli ve Timoshenko Kiriş Teorilerine Dayalı Eksenel Yönde Fonksiyonel Derecelenmiş Kolonların Burkulma Analizi. Çukurova Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi Dergisi, 37(2), 319-328.

Öz

Bu çalışmada; eksenel yönde fonksiyonel derecelenmiş malzemeli, doğru eksenli kolonların burkulma yükü Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi (TFY) ile incelenmiştir. Burkulma davranışını idare eden birinci mertebeden kanonik denklemler, Euler-Bernoulli (BKT) ve Timoshenko kiriş teorilerine (TKT) dayalı olarak denge denklemleri yardımıyla elde edilmiştir. Adi diferansiyel denklem takımları, Python dilinde hazırlanan programla çözülmüştür. Malzeme değişim fonksiyonunun, uzunluk/kalınlık oranının ve farklı sınır koşullarının burkulma yüküne etkisi parametrik olarak araştırılmıştır. Elde edilen burkulma yükleri, literatürde bulunan mevcut yöntemler ve Abaqus sonlu elemanlar programında bulunan değerler ile karşılaştırılmış, uygulanan yöntemin etkinliği gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Burkulma, Kolon, Fonksiyonel derecelenmiş malzemeler, Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi

Buckling Analysis of Axially Functionally Graded Columns Based on Euler-Bernoulli and Timoshenko Beam Theories

Abstract

In this study, the buckling load of straight column made of functionally graded material in the axial direction is investigated by the Complementary Functions Method (CFM). The canonical equations governing the buckling behavior are obtained with the aid of equilibrium equations based on the Euler-Bernoulli and Timoshenko beam theories. The set of ordinary differential equations is solved with a program prepared in Python language. The effects of material variation coefficients, length/thickness ratios, and different boundary conditions on the buckling load are investigated parametrically. The buckling loads obtained are compared with the existing methods in the literature and the values found in Abaqus, the finite element program, and the efficiency of the applied method is shown.

Keywords: Buckling, Column, Functionally graded materials, Complementary functions method

* Sorumlu yazar (Corresponding author): Burkay SİVRİ, bsivri@cu.edu.tr

1. GİRİŞ

Mekanik özellikleri bir noktadan diğer bir noktaya sürekli olarak değişen fonksiyonel derecelenmiş (FD) malzemeli elemanlar, havacılık ve uzay sanayi, tıp, otomotiv ve modern mühendislik uygulamalarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu tür yapıların; üretim teknikleri, aşınma, yorulma, titreşim, burkulma gibi özelliklerinin belirlenmesine yönelik çalışmalar günümüzde önem kazanmıştır. Bu nedenle FD malzemeli elemanların burkulmasını inceleyen birçok çalışma mevcuttur.

Gören ve Erim, değişen kesitli konsol Timoshenko kirişlerinin stabilitesini incelemiştir. On farklı, kademeli ve kademesiz kirişin kritik burkulma yüklerini, sonlu eleman ve sonlu eleman-transfer matris metodlarını kullanarak, Matlab 5.1 programlama diliyle hesaplamışlardır [1]. Coşkun ve Atay, sabit ve değişken kesitli Euler kolonlarının burkulma yüklerini bulmak için, doğrusal olmayan adi kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan Varyasyonel İterasyon Yöntemini kullanmışlardır [2]. Shahba ve arkadaşları, homojen olmayan fonksiyonel derecelenmiş Euler-Bernoulli kirişlerinin serbest titreşim ve stabilitesini incelemiştir [3]. Huang ve Li, üniform olmayan ve eksen boyunca eğilme rijitliği değişen Euler-Bernoulli kolonlarının burkulma davranışlarının incelenmesi için analitik yaklaşım sunmuşlardır. Mafsal uçlu, ankastre uçlu ve konsol kolonların burkulma davranışını idare eden diferansiyel denklemi, Fredholm integral denklemine indirgemişlerdir [4]. Elishakoff, fonksiyonel derecelenmiş kolonların burkulma davranışını incelemiştir. Çalışmasında konsol kolonların burkulma modunu, farklı polinom varyasyonlarını dikkate alarak vermiştir [5]. Yılmaz ve arkadaşları, elastik mesnetli uniform olmayan eksenel yönde fonksiyonel derecelenmiş kolonların burkulma analizini Lokalize Diferansiyel Kuadratür Yöntemi ile incelemiştir [6]. Filiz ve Aydoğdu, Ritz Metodu yardımıyla eksenel yönde fonksiyonel derecelenmiş Euler-

Bernoulli kirişlerinin çeşitli sınır koşullarında boyutsuz frekans parametrelerini ve kritik burkulma yüklerini bulmuşlardır [7]. Uluköy, malzeme özelliğinin genişlik boyunca değiştiği eksenel basınç yükü altındaki kolonun burkulma analizini sonlu eleman tabanlı Ansys programını kullanarak yapmıştır [8]. Xiao ve Li, bir ucunda dönme yayı bulunan homojen olmayan konsol kolonların Euler burkulmasını incelemiştir. Burkulma yüklerini kesin olarak bulabilmek için problem bir Bessel denklemine dönüştürülmüştür. Bulunan kesin burkulma yüklerini, moment metodu kullanılarak bulunan yaklaşık burkulma yükü değerleriyle karşılaştırmışlardır [9]. Lee ve Lee, kesit ve malzeme özelliklerinin kolon eksenine boyunca doğrusal değiştiği Euler-Bernoulli kolonlarının serbest titreşim ve burkulma analizini birleşik bir modelde sunmuşlardır. Yönetici denklemleri elde edip, bu denklemleri determinant arama algoritması ile birleştirilmiş doğrudan integrasyon yöntemiyle çözmüşlerdir. Buldukları sonuçları, Adina sonlu eleman yazılımından elde ettikleri sonuçlarla karşılaştırmışlardır [10]. Akgöz, kesitlerinin uzunlukları boyunca sürekli değiştiği eksenel basınç altındaki narin kolonların burkulma davranışını incelemiştir. Kolonlar Euler-Bernoulli kiriş teorisiyle modellenmiş ve burkulma yükleri Ritz Metoduyla bulunmuştur [11]. Lee ve Lee, burkulma kapasitesini en üst düzeye çıkarmak için eksenel derecelenmiş değişen kesitli kolonların optimizasyonunu incelemiştir. Diferansiyel denklemler, determinant arama algoritması ile birleştirilmiş doğrudan integrasyon yöntemi ile çözülmüştür [12]. Rajasekaran, fonksiyonel derecelenmiş üniform olmayan kirişlerin serbest titreşim ve burkulma analizlerini diferansiyel transformasyon yöntemini kullanarak incelemiştir [13]. Sivri ve Temel, Eksenel yük altında homojen-izotrop malzemeye sahip değişken kesitli Timoshenko kolonlarının kritik burkulma yüklerini TFY kullanarak bulmuşlardır. Farklı sınır koşullarının, uzunluk/kalınlık oranının ve farklı kesit değişim modellerinin burkulma yüküne etkilerini incelemiştir [14]. Nguyen ve arkadaşları, fonksiyonel derecelenmiş gözenekli

kirişlerin burkulma, eğilme ve titreşim davranışlarının analizi için bir kayma deformasyon teorisi sunmuşlardır. Lagrange eşitliklerini kullanarak elde ettikleri yönetici denklemler üzerinden sınır koşullarının, gözenek dağılımının ve kayma deformasyonunun mekanik özellikler üzerindeki etkisini araştırmışlardır [15]. Derikvand ve arkadaşları, çekirdek bölgesi gözenekli fonksiyonel derecelenmiş sandviç kirişlerin burkulma analizini incelemiştir. Virtüel iş prensibiyle elde ettikleri burkulma davranışını yöneten diferansiyel denklemleri, diferansiyel transformasyon yöntemiyle çözmüşlerdir [16].

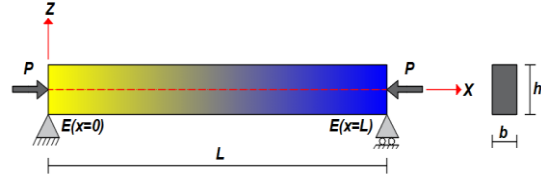
Analitik çözümün mümkün olmadığı veya zor olduğu diferansiyel denklemlerin çözümünde nümerik yöntemlerden yararlanılmaktadır. Literatür incelendiğinde araştırmacılar FD malzemeli kolonların mekanik özelliklerini sonlu eleman programları ve nümerik yöntemleri kullanarak araştırmışlardır. Yapılan bu çalışmada FD malzemeli üniform kolonların burkulma analizi için sınır değer problemini, başlangıç değer problemine dönüştürme prensibine dayanan TFY kullanılmıştır. TFY'nin, kodlanabilirliği, denklem takımından bağımsız sabit başlangıç koşulları kullanması ve matematiksel işlem verimliliği burkulma analizinde yöntemi cazip hale getirmektedir.

Bu çalışmada; kayma deformasyonunun etkileri de dikkate alınarak, eksenel yönde FD malzemeli kolonların burkulma davranışını idare eden birinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımı kanonik formda elde edilmiştir. Bulunan denklem takımı üzerinden; malzeme değişim fonksiyonunun, uzunluk/kalınlık oranının, kayma deformasyonunun ve farklı sınır koşullarının burkulma yüklerine etkileri araştırılmıştır.

2. TEMEL DENKLEMLER VE ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Şekil 1'de eksenel basınç kuvveti altındaki FD malzemeli kolonda; A dikdörtgen kesitin alanını, I atalet momentini, $E(x)$ ise elastisite modülünün x

ekseni boyunca malzeme fonksiyonuyla değişimini göstermektedir.



Şekil 1. Fonksiyonel derecelenmiş kolon

Eksenel ve düşey yer değiştirmeler, U_x ve U_z ile birim şekil değiştirmeler ε_x ve γ_{xz} ; TKT'ye göre Eşitlik 1-4'deki gibi ifade edilmektedir [17].

$$U_x = u(x) + z\theta(x) \quad (1)$$

$$U_z = w(x) \quad (2)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x} = u' + z\theta' \quad (3)$$

$$\gamma_{xz} = \theta + w' \quad (4)$$

Şekil 1'de verilen dikdörtgen kesit özelliklerine göre iç kuvvetler ile gerilmeler arasındaki ilişkiler Eşitlik 5-7'de verilmektedir.

$$N = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = b \int_{-h/2}^{h/2} E(x)\varepsilon_x dz \quad (5)$$

$$M = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = b \int_{-h/2}^{h/2} E(x)\varepsilon_x z dz \quad (6)$$

$$Q = k_s b \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = bk_s \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(x)}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} dz \quad (7)$$

Burada, k_s kesite bağlı kayma düzeltme katsayısını, ν ise poisson oranını göstermektedir.

Eşitlik 3-4, iç kuvvet-gerilme bağıntılarında yerine yazılarak Eşitlik 8-10 elde edilir. Normal kuvvet, kesme kuvveti ve momentteki değişimler ise, Eşitlik 11-13'de verilmektedir [18]. Bu çalışmada

burkulma davranışını idare eden birinci mertebeden kanonik denklem takımı Eşitlik 8-13'deki gibi elde edilmiştir.

$$\frac{du}{dx} = \frac{N}{K_{11}} \quad (8)$$

$$\frac{dw}{dx} = -\left(\frac{K_{33}}{K_{33} - P}\right)\theta \quad (9)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{K_{22}} \quad (10)$$

$$\frac{dN}{dx} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{dQ}{dx} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{dM}{dx} = Q - P\left(\frac{K_{33}}{K_{33} - P}\right)\theta \quad (13)$$

Burada K_{11} , K_{22} ve K_{33} kesit rijitlik sabitleri olup, Eşitlik 14,15'de verilmiştir.

$$\{K_{11}, K_{22}\} = \{E(x)A, E(x)I\} \quad (14)$$

$$K_{33} = k_s G(x)A \quad (15)$$

Çalışmada özel olarak, BKT'ye dayalı burkulma yükü hesaplarında Eşitlik 9 ve Eşitlik 13'de, $K_{33} / (K_{33} - P) = 1$ olarak alınmaktadır.

$$S(y) = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 \quad (16)$$

Eşitlik 16'da genel formu verilen sınır değer problemi, n adet birinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımına indirgenir. Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemiyle diferansiyel denklem takımının çözümü [17,19,20]; n adet homojen, bir adet homojen olmayan başlangıç değer problemi çözümü şeklinde Eşitlik 17'deki gibi yazılır. Çalışmada başlangıç değer

problemlerinin çözümünde beşinci mertebe Runge-Kutta algoritması kullanılmıştır [21].

$$y(x) = y_0(x) + c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) \quad (17)$$

Eşitlik 17' de; $y_0(x)$ homojen olmayan çözümü, $y_n(x)$ homojen çözüm fonksiyonlarını, c_n terimleri ise integrasyon sabitlerini ifade etmektedir. İntegrasyon sabitleri problemin sınır koşullarından elde edilir. Bu çalışmada ele alınan problemler çözülürken, yapı elemanlarında en sık karşılaşılan mesnetlenme durumlarına ait Çizelge 1'de verilen sınır koşulları (SK) dikkate alınmıştır.

Çizelge 1. Sınır koşulları

Sınır koşulları	Serbestlikler		
Ankastre (A)	$u = 0$	$w = 0$	$\theta = 0$
Sabit (S)	$u = 0$	$w = 0$	$M = 0$
Serbest Uç (Se)	$u = 0$	$Q = 0$	$M = 0$

Analizi yapılan problemin burkulma yükleri, sınır koşulları dikkate alınarak, diferansiyel denklem takımının homojen çözümünden elde edilen katsayılar matrisinin determinantını sıfır yapan değerlerden elde edilmektedir. Burkulma yükleri, Secant metoduyla iteratif olarak bulunmaktadır.

3. SAYISAL UYGULAMALAR

3.1. Uygulama I

Kullanılan çözüm yönteminin uygunluğu, yakınsaması ve etkinliğini göstermek için literatürde analitik çözümü verilen homojen-izotrop malzemeye sahip bir kolon ele alınmıştır [22]. Kolonun geometri ve malzeme özellikleri Eşitlik 18'de verilmiştir. Burkulma davranışını idare eden diferansiyel denklem takımı TFY ile $N = \{5, 10, 20, 50\}$ adım aralıkları ve çeşitli sınır koşulları için çözülmüştür.

$$r = \frac{I}{AL^2} = 0,01, k_s = 5/6, \nu = 0,3 \quad (18)$$

Çizelge 2. Homojen-İzotrop Euler-Bernoulli kolonlarının boyutsuz burkulma yükleri ($\overline{P}_{cr} = P_{cr} L^2 / EI$)

SK	Bu çalışma				Wang [22]
	$N=5$	$N=10$	$N=20$	$N=50$	
S-S	9,86920	9,86960	9,86960	9,86960	9,86960
A-S	20,18424	20,19060	20,19072	20,19072	20,19073
A-A	39,41029	39,47681	39,47839	39,47842	39,47842
A-Se	2,46740	2,46740	2,46740	2,46740	2,46740

Çizelge 2’de BKT’ye dayalı homojen izotrop kolonların TFY ile bulunan birinci burkulma moduna ait boyutsuz burkulma yükleri verilmiştir. Çizelge 3’de ise kayma deformasyonunun etkisinin

dikkate alındığı TKT’ye dayalı homojen izotrop kolonların birinci boyutsuz burkulma yükleri sunulmuştur.

Çizelge 3. Homojen-İzotrop Timoshenko kolonlarının boyutsuz burkulma yükleri ($\overline{P}_{cr} = P_{cr} L^2 / EI$)

SK	Bu çalışma				Wang [22]
	$N=5$	$N=10$	$N=20$	$N=50$	
S-S	7,54573	7,54596	7,54596	7,54596	7,54596
A-S	12,38488	12,38727	12,38732	12,38732	12,38732
A-A	17,67594	17,68931	17,68962	17,68963	17,68963
A-Se	2,29102	2,29102	2,29102	2,29102	2,29103

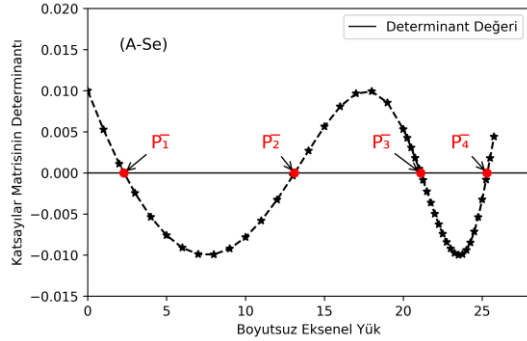
TKT’ye dayalı homojen-izotrop konsol kolonun dört burkulma moduna ait boyutsuz burkulma yükleri Çizelge 4’de verilmiştir. Bu sınır koşuluna sahip kolonun P eksenel yüküne bağlı katsayılar matrisi determinantının değişimi ise Şekil 2’de gösterilmiştir.

burkulma yükleriyle çok uyumlu olduğu görülmektedir. S-S sınır koşuluna sahip; homojen-izotrop Euler-Bernoulli kolonunun $N=10$ adım aralığında literatür ile birebir uyum sağladığı görülmektedir. Timoshenko kolonu için çözüm aralığı $N=20$ adım alındığında yeterli hassasiyet sağlanmıştır.

Çizelge 2-4 incelendiğinde, TFY ile elde edilen burkulma yüklerinin, literatürde bulunan mevcut

Çizelge 4. Homojen-İzotrop Timoshenko konsol kolonunun boyutsuz burkulma yükleri ($\overline{P}_{cr} = P_{cr} L^2 / EI$)

A-Se	Bu çalışma				Wang [22]
	$N=5$	$N=10$	$N=20$	$N=50$	
\overline{P}_1	2.29102	2.29102	2.29102	2.29102	2.29103
\overline{P}_2	13.11484	13.11785	13.11791	13.11791	13.11791
\overline{P}_3	21.06022	21.09093	21.09196	21.09198	21.09198
\overline{P}_4	25.33910	25.33024	25.33488	25.33498	25.33498



Şekil 2. A-Se sınır koşulu için katsayılar matrisinin determinantının değişimi

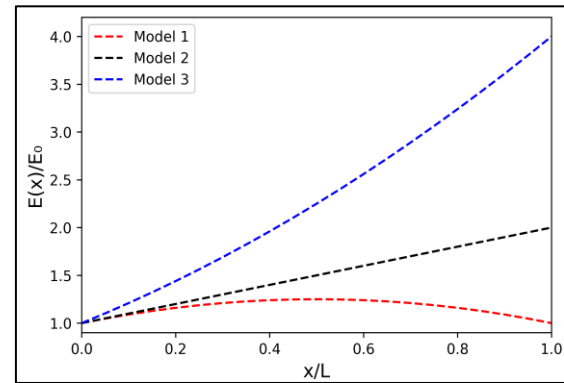
3.2. Uygulama II

Bu uygulamada, eksenel yönde FD malzemeli kolonların analizleri için malzeme modelleri Çizelge 5’de ve değişim fonksiyon grafikleri Şekil 3’de verilen literatürde üzerinde durulan üç farklı model ele alınmıştır [3,13]. E_0 terimi $x=0$ başlangıç noktasındaki elastisite modülünü göstermektedir. FD malzemeli kolonlarda $k_s = 0,85$, $\nu = 0,3$ olarak sabit alınmıştır. Bu

uygulama için TFY ile yapılan analizlerde $N = 20$ adım aralığı kullanılmıştır.

Çizelge 5. Malzeme değişim fonksiyonları

Model no	Değişim fonksiyonları
Model 1	$E_0(1+x-x^2)$
Model 2	$E_0(1+x)$
Model 3	$E_0(1+2x+x^2)$



Şekil 3. Elastisite modülünün kolon boyunca değişimi

Çizelge 6. BKT’ye göre FD malzemeli kolonların birinci boyutsuz burkulma yükleri ($\bar{P}_{cr} = P_{cr} L^2 / EI$)

SK	Model 1		Model 2		Model 3	
	Bu çalışma	Rajasekaran [13]	Bu çalışma	Rajasekaran [13]	Bu çalışma	Rajasekaran [13]
S-S	12,00000	12,00000	14,51125	14,51125	20,79229	20,79229
A-S	23,66437	23,66438	29,44896	29,44897	42,10915	42,10919
A-A	45,39557	45,39565	57,39388	57,39401	81,92314	81,92347
A-Se	2,86537	2,86375	3,11770	3,11770	3,83638	3,83638

Eksenel yönde fonksiyonel derecelenmiş BKT’ye göre kolonların birinci boyutsuz kritik burkulma yükleri Çizelge 6’da verilmiştir.

BKT’ye dayalı FD malzemeli kolonların çeşitli sınır koşulları için TFY ile bulunan boyutsuz burkulma yüklerinin literatürde verilen sonuçlarla oldukça uyumlu olduğu görülmektedir. A-A sınır koşulunda; bu çalışmadan elde edilen sonuçlarla literatürde bulunan mevcut sonuçların, malzeme değişim modellerine göre, {Model 1, Model 2, Model 3} bağıl farkları sırasıyla, { $\%1,76 \times 10^{-4}$, $\%2,27 \times 10^{-4}$, $\%4,03 \times 10^{-4}$ } olarak bulunmuştur.

Timoshenko teorisine dayalı eksenel yönde fonksiyonel derecelenmiş kolonların burkulma analizi için TFY ve Abaqus [23] sonlu elemanlar paket programı kullanılmıştır. Sonlu elemanlar programında, malzeme değişiminin hassas olarak modellenebilmesi için kolon, uzunluğu boyunca 200 adet homojen-izotrop elemana bölünmüştür. Abaqus ile analizlerde, kayma deformasyonunun dikkate alındığı B21 elemanı kullanılmıştır. Farklı sınır koşullarına sahip, FD malzemeli Timoshenko kolonlarının çeşitli L/h oranlarındaki birinci boyutsuz kritik burkulma yükleri Çizelge 7-10’da sunulmuştur.

Çizelge 7. TKT'ye göre FD malzemeli (S-S) kolonların boyutsuz burkulma yükleri ($\bar{P}_{cr} = P_{cr}L^2/E_0I$)

S-S	L/h							
	5		10		20		50	
	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus
Model 1	10,80851	10,80795	11,67826	11,67756	11,91792	11,91715	11,98679	11,99003
Model 2	13,09563	13,09508	14,13040	14,12970	14,41419	14,41373	14,49563	14,49653
Model 3	18,44967	18,44918	20,15927	20,15850	20,63077	20,62978	20,76629	20,76825

Çizelge 8. TKT'ye göre FD malzemeli (A-S) kolonların boyutsuz Burkulma Yükleri ($\bar{P}_{cr} = P_{cr}L^2/E_0I$)

A-S	L/h							
	5		10		20		50	
	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus
Model 1	19,52678	19,15028	22,47451	22,24680	23,35530	23,18256	23,61438	23,46390
Model 2	24,45475	23,79053	28,02424	27,69678	29,07975	28,87166	29,38927	29,22015
Model 3	34,49752	33,37868	39,94574	39,45156	41,54909	41,27102	42,01864	41,80950

Çizelge 9. TKT'ye göre FD malzemeli (A-A) kolonların boyutsuz burkulma yükleri ($\bar{P}_{cr} = P_{cr}L^2/E_0I$)

A-A	L/h							
	5		10		20		50	
	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus
Model 1	32,55260	32,55503	41,32260	41,32656	44,30405	44,30837	45,21734	45,22418
Model 2	40,50100	40,54020	52,01028	52,03872	55,94869	55,96512	57,15777	57,17063
Model 3	55,70032	55,88985	73,53695	73,67220	79,66902	79,72704	81,55473	81,58725

Çizelge 10. TKT'ye göre FD malzemeli (A-Se) kolonların boyutsuz burkulma yükleri ($\bar{P}_{cr} = P_{cr}L^2/E_0I$)

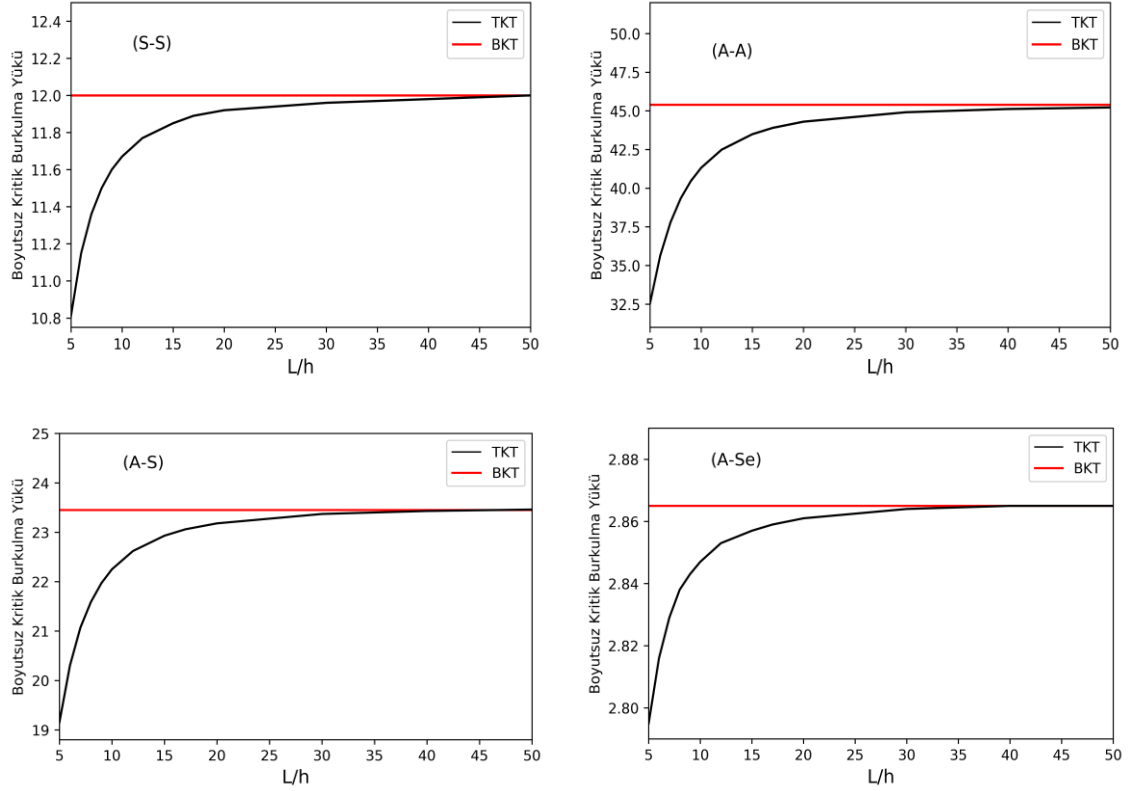
A-Se	L/h							
	5		10		20		50	
	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus
Model 1	2,79511	2,79513	2,84748	2,84752	2,86088	2,86084	2,86465	2,86834
Model 2	3,05877	3,05880	3,10275	3,10279	3,11394	3,11408	3,11709	3,11900
Model 3	3,77934	3,77941	3,82197	3,82210	3,83277	3,83278	3,83580	3,83954

A-A sınır koşuluna sahip, $L/h=5$ olan FD Timoshenko kolonun; TFY ve Abaqus ile bulunan burkulma yüklerinin, malzeme değişim modellerine göre, {Model 1, Model 2, Model 3} bağıl farkları sırasıyla, { %7,46x10⁻³, %9,68x10⁻², %3,40x10⁻¹ } olarak bulunmuştur.

Bu çalışmada, FD malzemeli kolonlar için bulunan boyutsuz burkulma yüklerinin, hem literatürde verilen mevcut sonuçlar hem de Abaqus sonlu

elemanlar programından elde edilen sonuçlar ile uyumlu olduğu görülmüştür.

Model 1 malzeme değişim fonksiyonu için BKT ve TKT'ye dayalı olarak modellenen FD malzemeli kolonlarda L/h oranlarının farklı sınır koşullarında birinci boyutsuz burkulma yüklerine etkisi Şekil 4'de gösterilmiştir. FD kolonlarda L/h oranı arttıkça TKT'den elde edilen sonuçların BKT sonuçlarına yaklaştığı gözlemlenmiştir.



Şekil 4. Farklı sınır koşullarına sahip model 1 FD malzemeli kolonlarda L/h oranının birinci boyutsuz burkulma yüklerine etkisi

S-S ve A-Se sınır koşullarına sahip, FD malzemeli Euler-Bernoulli ve Timoshenko kolonlarının çeşitli L/h oranlarındaki ikinci ve üçüncü boyutsuz kritik burkulma yükleri Çizelge 11,12’de sunulmuştur. Model 3 malzeme değişim fonksiyonuna sahip, FD malzemeli Timoshenko kolonlarının TFY ile bulunan ilk üç boyutsuz

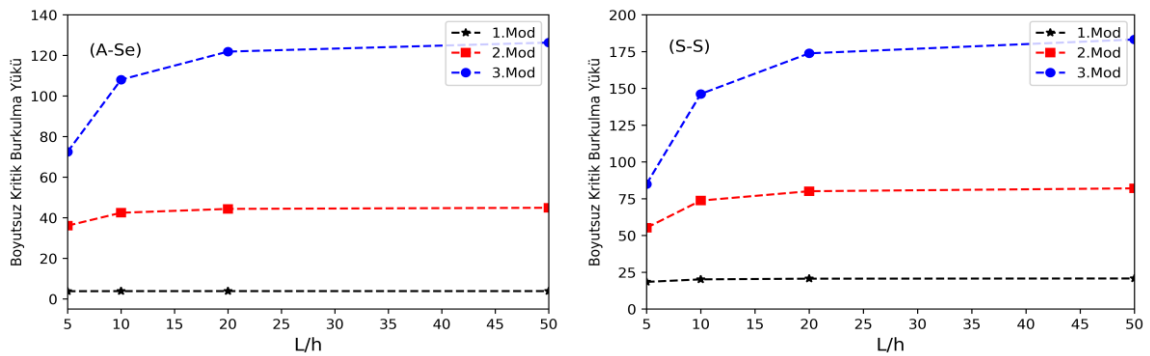
burkulma yüklerinin L/h oranlarına bağlı değişimleri Şekil 5’de gösterilmiştir. TKT’ye göre FD kolonların ikinci ve üçüncü boyutsuz burkulma yükleri, birinci boyutsuz burkulma yüküne benzer olarak L/h oranı arttıkça BKT değerlerine yaklaşmaktadır.

Çizelge 11. FD malzemeli kolonların ikinci boyutsuz burkulma yükleri ($\bar{P}_{cr} = P_{cr} L^2 / E_0 I$)

		TKT				BKT
		L/h=5	L/h=10	L/h=20	L/h=50	
S-S	Model 1	32,83244	42,09713	45,28704	46,26834	46,46007
	Model 2	40,47397	52,17372	56,18381	57,41558	57,65615
	Model 3	55,22680	73,72140	80,08105	82,03683	82,41894
A-Se	Model 1	21,04813	24,45013	25,47903	25,78277	25,84145
	Model 2	25,97227	30,17636	31,44109	31,81386	31,88584
	Model 3	36,07691	42,44074	44,34839	44,91009	45,01852

Çizelge 12. FD malzemeli kolonların üçüncü boyutsuz burkulma yükleri ($\bar{P}_{cr} = P_{cr}L^2/E_0I$)

		TKT				BKT
		L/h=5	L/h=10	L/h=20	L/h=50	
S-S	Model 1	54,01398	84,42919	98,20922	102,90829	103,85460
	Model 2	65,90379	104,81752	122,37768	128,35686	129,56043
	Model 3	84,96454	146,21802	173,82769	183,23303	185,12663
A-Se	Model 1	43,94567	61,96694	69,03023	71,30487	71,75519
	Model 2	54,07350	77,01162	85,96255	88,84061	89,41012
	Model 3	72,45161	108,05099	121,87528	126,31432	127,19240

**Şekil 5.** TKT'ye göre FD malzemeli kolonlarda L/h oranının boyutsuz burkulma yüklerine etkisi

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, basınç kuvveti altında aksel yönde fonksiyonel derecelenmiş kolonların burkulma davranışı incelenmiştir. Analizlerde, hem Euler-Bernoulli hem de Timoshenko kiriş teorileri kullanılmıştır. Homojen-izotrop kolonlar üzerinde yöntemin uygunluğu, yakınsaması ve etkinliği gösterilmiştir. Bu çalışmada bulunan burkulma yüklerinin, hem literatürde verilen mevcut sonuçlar hem de Abaqus sonlu elemanlar programından elde edilen sonuçlar ile uyumlu olduğu görülmüştür. FD kolonlarda en büyük boyutsuz burkulma yükleri, Model 3 malzeme değişim fonksiyonu için bulunmuştur. Aynı malzeme değişim fonksiyonu ve L/h oranına sahip kolonlarda en büyük burkulma yükleri A-A sınır koşulunda elde edilirken, en küçük burkulma yükleri A-Se sınır koşulunda elde edilmiştir. L/h oranı arttıkça Timoshenko teorisinden elde edilen sonuçların Euler-Bernoulli kiriş teorisi sonuçlarına yaklaştığı; bu oran azaldıkça kayma deformasyonunun kritik burkulma yüküne

etkisinin arttığı gözlemlenmiştir. Sonuç olarak, uygulanan yöntemin farklı sınır koşullarına sahip FD kolonların burkulma analizlerinde etkin olarak kullanılabileceği gösterilmiştir.

5. TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın bir bölümü Çukurova Üniversitesi tarafından düzenlenen 22. Ulusal Mekanik Kongresi'nde sunulmuştur.

6. KAYNAKLAR

- Gören, B., Erim, S., 2000. Değişken Kesitli Ankastre Timoshenko Kirişin Statik Stabilité Analizi. DEÜ Mühendislik Fakültesi, Fen ve Mühendislik Dergisi, 2(2), 75-86.
- Coşkun, S.F., Atay, M.T., 2009. Determination of Critical Buckling Load for Elastic Columns of Constant and Variable Cross-Sections Using Variational Iteration Method. Computers and Mathematics with Applications, 58(11-12), 2260-2266.

3. Shahbaa, A., Attarnejada, R., Hajilara, S., 2011. Free Vibration and Stability of Axially Functionally Graded Tapered Euler-bernoulli Beams. *Shock and Vibration*, 18(5), 683-696.
4. Huang, Y., Li, X.F., 2011. Buckling Analysis of Nonuniform and Axially Graded Columns with Varying Flexural Rigidity. *Journal of Engineering Mechanics*, 137(1), 73-81.
5. Elishakoff, I., 2012. Buckling of a Column Made of Functionally Graded Material. *Archive of Applied Mechanics*, 82(10), 1355-1360.
6. Yılmaz, Y., Girgin, Z., Evran, S., 2013. Buckling Analyses of Axially Functionally Graded Nonuniform Columns with Elastic Restraint Using a Localized Differential Quadrature Method. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, 1-12. <https://doi.org/10.1155/2013/793062>.
7. Filiz, S., Aydoğdu, M., 2015. Eksenel Fonksiyonel Derecelenmiş Kirişlerin Titreşim ve Burkulma Analizi. XIX. Ulusal Mekanik Kongresi, Trabzon, 483-491.
8. Uluköy, A., 2016. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemenin Lineer Burkulma Analizi. *AKÜ FEMÜBİD*, 16 Özel Sayı, 122-127.
9. Xiao, B.J., Li, X.F., 2019. Exact Solution of Buckling Load of Axially Exponentially Graded Columns and its Approximation. *Mechanics Research Communications*, 101, 103414.
10. Lee, J.K., Lee, B.K., 2019. Free Vibration and Buckling of Tapered Columns Made of Axially Functionally Graded Materials. *Applied Mathematical Modelling*, 75, 73-87.
11. Akgöz, B., 2019. Ritz Yöntemi ile Değişken Kesitli Kolonların Burkulma Analizi. *Mühendislik Bilimleri ve Tasarım Dergisi*, 7(2), 452-458.
12. Lee, J.K., Lee, B.K., 2021. Buckling Optimization of Axially Functionally Graded Columns Having Constant Volume. *Engineering Optimization*, 1-17. <https://doi.org/10.1080/0305215X.2020.1862824>.
13. Rajasekaran, S., 2013. Buckling and Vibration of Axially Functionally Graded Nonuniform Beams Using Differential Transformation Based Dynamic Stiffness Approach. *Meccanica*, 48, 1053-1070.
14. Sivri, B., Temel, B., 2022. Değişken Kesitli Timoshenko Kolonlarının Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemiyle Burkulma Analizi. *Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi, Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 11(1), 122-128.
15. Nguyen, N.D., Nguyen, T.N., Nguyen, T.K., Vo, T.P., 2022. A New Two-variable Shear Deformation Theory for Bending, Free Vibration and Buckling Analysis of Functionally Graded Porous Beams. *Composite Structures*, 282, 115095.
16. Derikvand, M., Farhatnia, F., Hodges, D.H., 2021. Functionally Graded Thick Sandwich Beams with Porous Core: Buckling Analysis via Differential Transform Method. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 1-28.
17. Noori, A.R., Rasooli, H., Aslan, T.A., Temel, B., 2020. Fonksiyonel Derecelenmiş Sandviç Kirişlerin Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi ile Statik Analizi. *Çukurova Üniversitesi, Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi*, 35(4), 1091-1101.
18. Timoshenko, S.P., Gere, J.M., 1961. *Theory of Elastic Stability*. McGraw-Hill, 560.
19. Noori, A.R., Aslan, T.A., Temel, B., 2020. Static Analysis of FG Beams via Complementary Functions Method. *European Mechanical Science*, 4(1), 1-6.
20. Noori, A.R., Aslan, T.A., Temel, B., 2020. An Efficient Approach for In-plane Free and Forced Vibrations of Axially Functionally Graded Parabolic Arches with Nonuniform Cross Section. *Composite Structures*, 200, 701-710.
21. Chapra, S.C., Canale, R.P., 2003. *Yazılım ve Programlama Uygulamalarıyla Mühendisler İçin Sayısal Yöntemler*. Literatür Yayınevi, 1026.
22. Wang, C.M., Wang, C.Y., Reddy, J.N., 2005. *Exact Solutions for Buckling of Structural Members*. CRC Press, Florida, 224.
23. Dassault Systèmes, ABAQUS/CAE v6.14, 2016.