

Fonksiyonel Derecelenmiş Malzeme ve Değişken Kesitli Silindirik Olmayan Helisel Çubukların Titreşimi

Yavuz Çetin CUMA *¹ ORCID 0000-0003-1530-8211
Faruk Fırat ÇALIM¹ ORCID 0000-0002-7493-3386

¹İnşaat Mühendisliği Bölümü, Adana Alparslan Türkeş Bilim ve Teknoloji Üniversitesi, Adana

Geliş tarihi: 26.11.2021

Kabul tarihi: 21.03.2022

Atıf şekli/ How to cite: CUMA, Y.Ç., ÇALIM, F.F., (2022). Fonksiyonel Derecelenmiş Malzeme ve Değişken Kesitli Silindirik Olmayan Helisel Çubukların Titreşimi. Çukurova Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi Dergisi, 37(1), 283-292.

Öz

Bu çalışmada fonksiyonel derecelenmiş malzemeli değişken kesite sahip silindirik olmayan helisel çubukların serbest titreşimi incelenmiştir. Malzeme ve kesit değişiminin çubuk eksenine boyunca olduğu varsayımı kullanılmıştır. Eksenel ve kayma deformasyonlarını içeren çubuğun serbest titreşimini idare eden diferansiyel denklemler Timoshenko kiriş teorisi kullanılarak elde edilmiştir. Ardından taşıma matrisi ve rijitlik matrisi yöntemleri bir arada kullanılarak diferansiyel denklemler sayısal olarak çözülmüştür. Malzeme değişim parametresi (β_{mat}), kesit değişim parametresi (β_{sec}) silindirin kenar ve orta kısımlarının yarıçap oranının R_2/R_1 hiperbol ve varil tipi geometriye sahip silindirik olmayan helisel çubukların serbest titreşimine etkisi araştırılmıştır. Literatürde bulunan örnek ve ANSYS paket programı kullanılarak elde edilen sonuçlar karşılaştırılmalı olarak verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fonksiyonel derecelenmiş malzeme, Serbest titreşim, Silindirik olmayan helisel çubuk, Değişken kesit

Vibration Analysis of Non-Cylindrical Helical Rods with Functionally Graded Materials and Variable Cross-sectional Area

Abstract

In this study, free vibration of non-cylindrical helical rods of variable cross-section with functionally graded material was investigated. Material and cross-section variation are assumed to be along the rod axis. The differential equations governing the free vibration of the rod including axial and shear deformations are obtained by using the Timoshenko's beam theory. Then, the obtained differential equations are solved numerically by using the transfer matrix and stiffness matrix methods simultaneously. The effect of material variation parameter (β_{mat}), cross section variation parameter (β_{sec}), ratio of the edge and middle point radiuses of the cylinder (R_2/R_1) on the free vibration behaviour of hyperboloidal and barrel type non-cylindrical helical rods were investigated. The results obtained from

*Sorumlu yazar (Corresponding author): Yavuz Çetin CUMA, cumayc@atu.edu.tr

the present study are compared with the example available in the literature and the ANSYS package program.

Keywords: Functionally graded material, Free vibration, Non-cylindrical helical rod, Variable cross-section

1. GİRİŞ

Helisel geometriye sahip çubuklar çeşitli mühendislik dallarında birçok farklı uygulama alanı bulmaktadır. Bunların tamamına yakını araç süspansiyonu, sübap yayları, spiral merdivenler ve silah yayları gibi dinamik yüklemeler altında çalışmaktadır. Dolayısıyla bu yapısal elemanların dinamik davranışının incelenmesi önem arz etmektedir. Dinamik davranışın incelenmesi hususunda en önemli bilgilerden birisi doğal titreşim frekanslarının belirlenmesidir. Bu frekansların elde edilmesi, tasarım aşamasında elemanın çalışması planlanan frekans aralığında doğal titreşim frekansı bulunmaması, dolayısıyla da rezonans hareketinden kaçınılması sağlanmasındır.

Silindirik ve silindirik olmayan geometriye sahip, sabit ve değişken kesitli ve çeşitli malzeme özellikleri gösteren helisel çubukların dinamik ve statik analizleri birçok araştırmacının çalışma konusu olmuştur. Epstein [1] konik helisel çubukların uzama değerleri ve serbest titreşim frekanslarını hem teorik hem deneysel olarak incelemiştir. Massoud [2] uzaysal bir çubuğun hareket denklemlerini kayma ve eksenel deformasyonları da dahil ederek vektörel formda elde etmiştir. Mottershead [3] sonlu elemanlar yöntemi ile helisel yayların dinamik analizini gerçekleştirmiştir. Nagaya ve arkadaşları [4] rastgele şekle sahip yayların serbest titreşim problemini taşıma matrisi yöntemini kullanarak çözmüştür. Frekans denklemini hiperbol ve varil tipi helisel çubuklar için kullanılmak üzere genelleştirmiştir. Yıldırım ve İnce [5] silindirik olmayan helisel çubukların serbest titreşim analizini taşıma matrisi yöntemi ile çözmüştür. Birçok parametreyi kapsayan bu çalışmayı teorik ve deneysel birçok çalışmanın sonuçları ile karşılaştırmışlardır. Yıldırım [6, 7] rijitlik matrisi metodu ile silindirik olmayan helisel çubukların serbest titreşim analizini eksenel ve kayma

deformasyonlarını dahil ederek çözmüş çeşitli parametrelerin serbest titreşim frekanslarına olan etkisini yorumlamıştır. Busool ve Eisenberger [8] dinamik rijitlik matrisi metoduyla silindirik olmayan helisel çubukların serbest titreşim analizini yapmıştır. Mod şekillerini elde ederek literatürdeki teorik ve deneysel çalışmalar ile karşılaştırmıştır. Çalım viskoelastik, anizotropik eğri eksenli helisel çubukların dinamik davranışı üzerine çalışmalar yapmıştır [9]. Temel ve Çalım [10] impulsif yüke maruz silindirik helisel çubukların zorlanmış titreşim analizini yapmışlardır. Sonuçları Laplace uzayında elde etmiş ve ters Laplace dönüşümüyle zaman uzayına çevirmişlerdir. Girgin [11] değişken kesitli silindirik olmayan helisel çubukların serbest titreşim analizini karışık sonlu elemanlar yöntemi kullanarak çözmüş ve sonuçları ANSYS ile kıyaslamıştır. Çalım [12,13] izotropik ve anizotropik yayların dinamik analizini parametrik çalışmalarla incelemiştir. Yu ve Hao [14-16] burulma etkisini dahil ederek silindirik olmayan helisel çubukların serbest titreşimini taşıma matrisi metoduyla incelemiştir. Kaçar ve Yıldırım [17] kompozit helisel çubukların burkulma ve serbest titreşim analizini çalışmışlardır. Eratlı ve arkadaşları [18] karışık sonlu elemanlar yöntemi kullanarak silindirik ve silindirik olmayan helisel yayların serbest titreşim analizini yapmışlardır. Literatürde sıklıkla kullanılan dairesel kesitin dışındaki kesitleri burulma etkilerini de ele alarak incelemiştir. Ermiş ve arkadaşları [19] farklı yüklemeler altındaki viskoelastik hiperbol helisel yayların zorlanmış titreşim analizini yapmışlardır. Ermiş ve Omurtag [20] konik helisi iki farklı geometrik tanımını kullanarak modellemiş ve bu modellerin daha iyi sonuçlar verdiği durumları parametrik çalışma ile incelemiştir. Arıbaş ve arkadaşları [21] kesin helis geometrisi ve çarpılmanın helisel çubukların statik ve dinamik davranışları üzerindeki etkilerini incelemiştir. Düzlemsel eğri eksenli çubuk kabulü ile uzaysal logaritmik spiral fonksiyonunun farkı

açıklanmıştır. Arıbaş ve Omurtag [22] kesin helis geometrisini sandviç kesitli helisel yayı modellemek için kullanmışlar. Karışık sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak bu çubukların statik davranışı incelenmiştir. Çalım ve Cuma [23] hiperbol ve varil tipi helisel çubukların fonksiyonel derecelenmiş malzeme ve değişken kesite sahip olması durumunu incelemişlerdir. Taşıma matrisi yöntemi ile bu çubukların serbest titreşim analizi üzerine parametrik çalışma gerçekleştirmişlerdir. Cuma ve Çalım [24] farklı parametrelerin fonksiyonel derecelenmiş malzeme ve değişken kesite sahip silindirik helisel çubukların serbest titreşimine etkisini taşıma matrisi yöntemini kullanarak incelemişlerdir.

Literatür taramasından da görüldüğü gibi fonksiyonel derecelenmiş silindirik olmayan helisel çubukların serbest titreşimi üzerine çalışmalar sınırlı sayıdadır. Bu konuda örneklerin artırılarak farklı parametre ve sınır koşullarının incelenmesi literatüre önemli bir katkı sağlanacağı anlamına gelmektedir. Bundan dolayı bu çalışmada hiperbol ve varil tipi helisel çubukların serbest titreşimi incelenecek olup farklı malzeme ve kesit değişim fonksiyonları ve sınır şartlarının serbest titreşim frekanslarına etkisi araştırılacaktır.

2. SİLİNDİRİK OLMAYAN HELİSEL ÇUBUK GEOMETRİSİ

Silindirik ve silindirik olmayan helisel çubukların temel farkı silindir yarıçapının eksen boyunca değişkenlik göstermesidir. Hiperbol ve varil geometrideki helisel çubukların yatay yarıçapı çubuğun üzerindeki herhangi bir noktada aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$R(\phi) = R_1 + (R_2 - R_1) \left(1 - \frac{\phi}{n\pi}\right)^2 \quad (1)$$

burada ϕ ve n yatay açı ve sarım sayısı, $R(\phi)$ ise bir noktadaki helis yarıçapı, R_1 ve R_2 ise orta nokta ve uçnoktalardaki helis yarıçapıdır. Birim helis uzunluğu Şekil 1c'de görüldüğü gibi elde edilebilir.

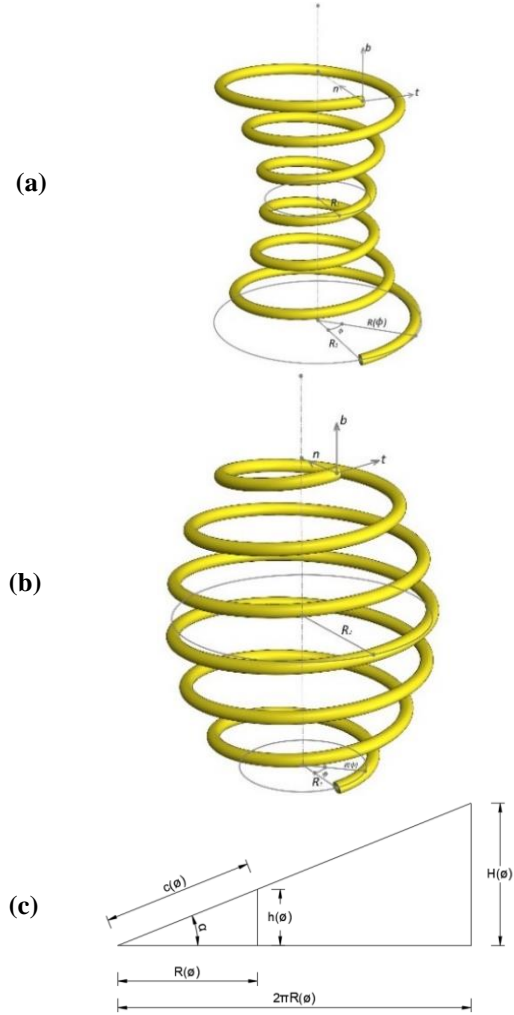
Sonlu bir helis parçasının uzunluğu (ds) helis açısına (ϕ) bağlı olarak $ds = c d\phi$ şeklinde

hesaplanabilir. Sonsuz küçüklikteki bir helisel çubuk elemanı aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$ds = \sqrt{R(\phi)^2 + h(\phi)^2} d\phi = c(\phi) d\phi, \quad h(\phi) = H(\phi)/2\pi \quad (2)$$

burada α , $H(\phi)$ ve $h(\phi)$ sırasıyla helis yükselme açısı, bir turdaki helis yüksekliği ve birim uzunluktaki helis yüksekliğidir (Şekil 1c). $c(\phi)$ ise birim helis uzunluğudur. Eğrilik $\chi(\phi)$ ve çarpıklık $\tau(\phi)$ değerleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\chi(\phi) = R(\phi)/c^2(\phi), \quad \tau(\phi) = h(\phi)/c^2(\phi) \quad (3)$$



Şekil 1. (a) Hiperbol tipi helis, (b) varil tipi helis, (c) silindirik olmayan helisin birim elemanı

3. SİLİNDİRİK OLMAYAN HELİSEL ÇUBUKLARIN DİNAMİK DAVRANIŞINI İDARE EDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Herhangi bir noktadaki yerdeğiştirme $U(s,t)$, dönme $\Omega(s,t)$, iç kuvvet $T(s,t)$ ve iç moment $M(s,t)$ vektörlerinin sembolik ifadeleridir. Sonsuz küçüklikteki deformasyonlar varsayıldığında uzaysal çubuğun durumunu idare eden diferansiyel denklemler aşağıdaki gibidir.

$$\frac{dT}{ds} + p = \rho A \ddot{U} \quad \frac{dM}{ds} + t \times T + m = \rho I \ddot{\Omega} \quad (4)$$

$$\frac{dU}{ds} + t \times \Omega = A^{-1} T \quad \frac{d\Omega}{ds} = B^{-1} M \quad (5)$$

burada, ρ , A , I , p ve m sırasıyla yoğunluk, kesit alanı, eylemsizlik momentleri, dış yükler ve dış momentlerdir. A ve B matrisleri çubuğun geometric ve malzeme özelliklerini barındırmaktadır ve aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$A = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & GA/\alpha_n & 0 \\ 0 & 0 & GA/\alpha_b \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$B = \begin{bmatrix} GI_t & 0 & 0 \\ 0 & EI_n & 0 \\ 0 & 0 & EI_b \end{bmatrix}$$

E ve G elastic sabitler, A ve I (I_t , I_n , I_b) kesit alanı ve eylemsizlik momentidir. α_n ve α_b ise kayma düzeltme katsayılarıdır.

Hareketli koordinat sistemi teğet (t), normal (n) ve bi-normal (b) birim vektörlerle tanımlanır. Birim vektörler t , n , ve b arasındaki bağıntı Frenet-Serret formülasyonları ile kurulabilir.

$$\frac{dt}{ds} = \chi(\phi)n \quad \frac{dn}{ds} = -\chi(\phi)t + \tau(\phi)b \quad db/ds = -\tau(\phi)n \quad (7)$$

Serbest titreşim analizinde dış yükler sıfır olarak tanımlanmaktadır ($p=m=0$). Harmonik titreşim kabulü yapıldığında, U , Ω , T ve M aşağıdaki hali almaktadır.

$$U(s,t) = U(s) e^{i\omega t}, \quad \Omega(s,t) = \Omega(s) e^{i\omega t}, \quad (8)$$

$$T(s,t) = T(s) e^{i\omega t}, \quad M(s,t) = M(s) e^{i\omega t}$$

burada, ω açısal frekanstır.

Hareketli koordinat sisteminde (t , n , b) tanımlanmış fonksiyonel derecelenmiş değişken kesitli silindirik olmayan helisel çubuklara ait adi diferansiyel denklemler aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\frac{dU_t}{d\phi} = \frac{R(\phi)}{c(\phi)} U_n + c(\phi) \frac{T_t}{E(\phi)A(\phi)} \quad (9a)$$

$$\frac{dU_n}{d\phi} = -\frac{R(\phi)}{c(\phi)} U_t + \frac{h(\phi)}{c(\phi)} U_b + c(\phi) \Omega_b + c(\phi) \frac{\alpha_n T_n}{G(\phi)A(\phi)} \quad (9b)$$

$$\frac{dU_b}{d\phi} = -\frac{h(\phi)}{c(\phi)} U_n - c(\phi) \Omega_n + c(\phi) \frac{\alpha_b T_b}{G(\phi)A(\phi)} \quad (9c)$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\phi} = \frac{R(\phi)}{c(\phi)} \Omega_n + c(\phi) \frac{M_t}{G(\phi)I_t(\phi)} \quad (9d)$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\phi} = -\frac{R(\phi)}{c(\phi)} \Omega_t + \frac{h(\phi)}{c(\phi)} \Omega_b + c(\phi) \frac{M_n}{E(\phi)I_n(\phi)} \quad (9e)$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\phi} = -\frac{h(\phi)}{c(\phi)} \Omega_n + c(\phi) \frac{M_b}{E(\phi)I_b(\phi)} \quad (9f)$$

$$\frac{dT_t}{d\phi} = \frac{R(\phi)}{c(\phi)} T_n - c(\phi) \rho(\phi) A(\phi) \omega^2 U_t \quad (9g)$$

$$\frac{dT_n}{d\phi} = -\frac{R(\phi)}{c(\phi)} T_t + \frac{h(\phi)}{c(\phi)} T_b - c(\phi) \rho(\phi) A(\phi) \omega^2 U_n \quad (9h)$$

$$\frac{dT_b}{d\phi} = -\frac{h(\phi)}{c(\phi)} T_n - c(\phi) \rho(\phi) A(\phi) \omega^2 U_b \quad (9i)$$

$$\frac{dM_t}{d\phi} = \frac{R(\phi)}{c(\phi)} M_n - c(\phi)\rho(\phi)I_t(\phi)\omega^2\Omega_t \quad (9j)$$

$$\frac{dM_n}{d\phi} = -\frac{R(\phi)}{c(\phi)} M_t + \frac{h(\phi)}{c(\phi)} M_b + c(\phi) T_b - c(\phi)\rho(\phi)I_n(\phi)\omega^2\Omega_n \quad (9k)$$

$$\frac{dM_b}{d\phi} = -\frac{h(\phi)}{c(\phi)} M_n - c(\phi) T_n - c(\phi)\rho(\phi)I_b(\phi)\omega^2\Omega_b \quad (9l)$$

Matris notasyonunda, Eşitlik 9a-1 kapalı formda aşağıdaki gibidir.

$$\frac{dS(\phi)}{d\phi} = D(\phi, \omega) S(\phi) \quad (10)$$

D ve S sırasıyla diferansiyel geçiş matrisi ve durum vektörüdür. Durum vektörünün elemanları $S(\phi) = \{U_t, U_n, U_b, \Omega_t, \Omega_n, \Omega_b, T_t, T_n, T_b, M_t, M_n, M_b\}^T$ Eşitlik 10 kullanılarak elde edilebilir.

$$S(\phi) = F(\phi, \omega)S(0) \quad (11)$$

Burada, F dinamik taşıma matrisi olarak adlandırılıp D diferansiyel geçiş matrisinin Taylor serisi açılımı ile elde edilebilmektedir [5,25].

$$F = e^{\phi D} = I + \phi D + \frac{\phi^2}{2!} D^2 + \frac{\phi^3}{3!} D^3 + \dots \quad (12)$$

Diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde taşıma matrisi ve rijitlik matrisi yöntemleri bir arada kullanılmaktadır. Eleman rijitlik matrisleri taşıma matrisi yöntemi kullanılarak elde edilmiş ve sistem rijitlik matrisi standart kodlama tekniği ile oluşturulmuştur. Sistem rijitlik matrisinin determinantını sıfır yapan ω değerleri elde edilmiştir.

4. SAYISAL ÖRNEKLER

Bu çalışmada Mathematica yazılımı kullanılarak silindirik olmayan helisel çubukların fonksiyonel

derecelenmiş değişken kesit durumlarını da dahil ederek serbest titreşim problemini çözen bir algoritma geliştirilmiştir. Bu çalışmada literatürde bulunan değişken kesitli silindirik olmayan helisel çubukların serbest titreşimi analizi ile karşılaştırma yapılmış ardından fonksiyonel derecelenmiş malzeme de dahil edilerek parametrik bir çalışma yürütülmüştür. Parametrik çalışmada malzeme değişim parametresinin (β_{mat}), kesit değişim parametresinin (β_{sec}), ve helisel çubuğun uç ve orta noktalarındaki yarıçap oranlarının (R_2/R_1) çubuğun serbest titreşimi üzerindeki etkileri araştırılmıştır. İkinci örnekte elde edilen sonuçlar ANSYS paket programında BEAM188 elemanları kullanılarak elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. İki örnekte elde edilen sonuçlar tablolar kullanılarak sunulmuştur.

4.1. Değişken Kesitli Silindirik Olmayan Helisel Çubukların Serbest Titreşimi

Karşılaştırma örneği olarak değişken kesite sahip silindirik olmayan helisel çubukların serbest titreşim analizi yapılmış ve literatürde Girgin'in [11] yürütmüş olduğu çalışma ile karşılaştırılmıştır. Kesit değişimi eksen boyunca olup orta ve uç kısımlardaki kesit çapları arasındaki oran aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$d_1 = d_2 \beta_{sec} \quad (16)$$

burada d_1 ve d_2 sırasıyla $R(\phi)=R_1$ ve $R(\phi)=R_2$ durumundaki kesit çaplarını ifade etmektedir. Kullanılan malzeme ve kesit özellikleri sıralanmıştır: $E=210$ GPa, $\rho=7850$ kg/m³, $\nu=0,3$, $\alpha=4,8^\circ$, $n=6,5$, $\alpha_n=\alpha_b=1,1$. Sonuçların karşılaştırılması için ANSYS programı kullanılarak problem 2000 elemanla çözülmüştür. Geliştirilmiş olan algoritmada ise 200 eleman kullanılarak çok daha küçük sistem matrisleri elde edilmiştir.

Çizelge 1. Değişken kesitli hiperbol helisel çubuğun ilk altı doğal titreşim frekansı (Hz) ($R_1=13$ mm, $R_2/R_1=2.4$, $d_2=2.6$ mm)

β_{sec}	Mod	Girgin [11]	ANSYS	Bu çalışma
0,25	1	91,010	89,830	90,020
	2	109,67	108,10	108,24
	3	117,04	115,52	115,69
	4	121,71	120,16	120,51
	5	130,26	128,61	129,27
	6	143,00	140,84	140,82
0,5	1	85,560	84,380	84,480
	2	108,39	106,94	107,14
	3	110,12	108,57	108,51
	4	132,02	130,24	130,78
	5	135,71	133,79	133,94
	6	149,31	147,14	147,46
0,75	1	80,810	79,680	79,690
	2	101,86	100,56	100,97
	3	107,80	106,23	105,87
	4	132,57	130,78	131,27
	5	153,07	150,92	151,04
	6	162,41	160,27	160,94

Çizelge 1 ve 2'deki verilerden anlaşılacağı üzere bu çalışmada elde edilen sonuçların önceki çalışma ve ANSYS sonuçları ile uyum içerisinde. Kesit değişim parametresinin artışı doğal titreşim frekanslarında düşüşe sebep olmaktadır.

Çizelge 2. Değişken kesitli varil helisel çubuğun ilk altı doğal titreşim frekansı (Hz) ($R_1=25$ mm, $R_2/R_1=0,2$, $d_2=2$ mm)

β_{sec}	Mod	Girgin [11]	ANSYS	Bu çalışma
0,25	1	36,52	36,60	36,43
	2	39,53	39,57	39,18
	3	47,96	48,09	47,86
	4	50,28	50,31	50,13
	5	53,22	53,41	53,13
	6	55,66	55,83	55,53
0,5	1	54,13	54,23	54,00
	2	55,71	55,80	55,58
	3	71,57	71,66	71,41
	4	71,63	71,70	71,48
	5	86,77	87,16	86,66
	6	89,54	89,95	89,43
0,75	1	64,82	64,86	64,68
	2	69,24	69,53	69,15
	3	87,19	87,30	87,07
	4	87,22	87,32	87,11
	5	116,9	117,4	116,8
	6	118,9	119,6	118,8

Sonuçlar önceki çalışma ve ANSYS ile oldukça uyum içerisinde. Kesit değişim parametresi arttıkça frekans değerlerinin de yükseldiği görülmektedir.

4.3. Fonksiyonel Derecelenmiş Malzemeli Değişken Kesite Sahip Silindirik Olmayan Helisel Çubukların Serbest Titreşimi

Mathematica programı kullanılarak geliştirilen algoritmaya malzeme değişim parametresi entegre edilmiştir. Bu algoritma kullanılarak iki ucu ankastre varil ve hiperbol tipi helisel çubukların serbest titreşim analizi yapılmıştır. Malzeme ve kesit değişimini idare eden fonksiyon aşağıdaki gibidir.

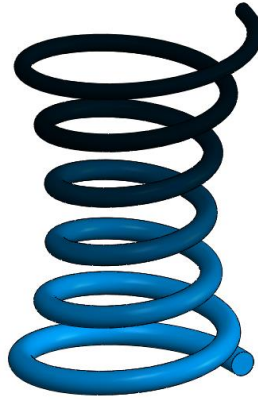
$$P(\phi) = P_0 e^{-\beta \left(\frac{\phi}{2n\pi}\right)} \quad (17)$$

Orta noktadaki kesit çapı d_1 uç noktadaki kesit çapı d_2 ve kesit değişim parametresi β_{sec} (0,25, 0,5, 0,75, 1) kullanılarak ifade edilmiştir. Elastisite modülü $E(\phi)$ ve kütleli yoğunluk $\rho(\phi)$ malzeme değişim parametresi β_{mat} (0,5, 1, 1,5, 2) ile ifade edilmiştir. Kullanılan ortak malzeme ve geometik özellikler şöyledir. $E=210$ GPa, $\rho=7850$ kg/m³, $\alpha=4,8^\circ$, $n=6,5$ sarım, $\nu=0,3$, $\alpha_n=\alpha_b=1,1$.

4.3.1. Hiperbol Tipi Helisel Çubuk

Şekil 2’de değişken kesit ve malzeme özelliklerine sahip hiperbol helisel çubuk gösterilmiştir. Hiperbol örneğinde farklı olarak kullanılan parametreler şöyledir: $d_2=2$ mm, $R_1=25$ mm. Farklı parametreler kullanılarak elde edilen temel frekanslar Çizelge 3’de verilmiştir.

Çizelge 3’den görüleceği gibi bu çalışmada elde edilen sonuçlar ile ANSYS programından elde edilen sonuçlar oldukça uyum içerisindedir. Temel frekanslar silindirik helis geometrisinden uzaklaştıkça düşmektedir. Bunun nedeni helis rijitliğindeki azalmadır.



Şekil 2. Fonksiyonel derecelenmiş malzemeli değişken kesitli hiperbol helis

Çizelge 3’den görüleceği gibi bu çalışmada elde edilen sonuçlar ile ANSYS programından elde edilen sonuçlar oldukça uyum içerisindedir. Temel

frekanslar silindirik helis geometrisinden uzaklaştıkça düşmektedir. Bunun nedeni helis rijitliğindeki azalmadır.

Çizelge 3. Fonksiyonel derecelenmiş malzeme ve değişken kesite sahip hiperbol helisel çubuğun temel frekansları (Hz)

R_2/R_1		1,2		1,6		2		2,4	
β_{mat}	β_{sec}	ANSYS	Bu çalışma	ANSYS	Bu çalışma	ANSYS	Bu çalışma	ANSYS	Bu çalışma
0	0,	9,32	9,33	6,78	6,80	5,09	5,09	3,94	3,95
	0,25	8,33	8,34	6,10	6,11	4,60	4,62	3,57	3,60
	0,50	7,61	7,61	5,67	5,68	4,32	4,34	3,37	3,41
	0,75	7,05	7,03	5,37	5,36	4,15	4,17	3,27	3,29
0,25	0,	9,33	9,34	6,79	6,81	5,10	5,11	3,95	3,96
	0,25	8,41	8,40	6,17	6,19	4,66	4,68	3,62	3,64
	0,50	7,73	7,72	5,78	5,79	4,41	4,44	3,45	3,49
	0,75	7,18	7,16	5,50	5,51	4,26	4,27	3,36	3,37
0,5	0,	9,36	9,37	6,81	6,83	5,12	5,14	3,96	3,98
	0,25	8,49	8,50	6,25	6,27	4,73	4,76	3,67	3,71
	0,50	7,85	7,85	5,89	5,90	4,51	4,54	3,53	3,57
	0,75	7,32	7,31	5,63	5,63	4,37	4,39	3,45	3,47
0,75	0,	9,40	9,42	6,85	6,88	5,15	5,17	3,99	4,01
	0,25	8,59	8,59	6,34	6,37	4,81	4,84	3,74	3,77
	0,50	7,99	7,97	6,02	6,03	4,62	4,65	3,62	3,66
	0,75	7,47	7,45	5,77	5,78	4,49	4,50	3,55	3,57

Frekans değerleri incelendiğinde en güçlü değişimin yarıçap oranlarında meydana geldiği görülmektedir. Yarıçap oranı arttıkça silindirik helis geometrisinden uzaklaşmakta ve frekans değerleri düşüş göstermektedir.

Frekans değerleri sabit kesitli çubuğun en yüksek frekans değerlerine sahip olduğunu göstermektedir. Kesit değişim parametresi yükseldikçe kesit çapının azalması dolayısıyla frekanslar düşmektedir. Malzeme değişim parametresindeki artış frekansları artırsa da frekanslar üzerindeki etkisinin diğer parametrelere nispeten daha az olduğu görülmektedir. Ayrıca malzeme değişim parametresinin kesit değişim parametresinin etkisini azalttığı da açıktır. Bu çalışmada incelenen değerler kapsamında yarıçap oranını en büyük etkiye sahiptir.

4.3.2. Varil Tipi Helisel Çubuk

Varil tipi helisel çubuğun farklı malzeme ve kesit özelliklerinde temel frekansları araştırılmıştır. Bu örnekte kullanılan kesit değerleri şöyledir: $d_2=2$ mm, $R_1=25$ mm. Farklı kesit değişim parametresi, malzeme değişim parametresi ve yarıçap oranları altında temel frekanslar geliştirilen

algoritma ve ANSYS programı kullanılarak belirlenmiştir. Şekil 3’de kesit ve malzeme değişimi gösterilmiştir.



Şekil 3. Fonksiyonel derecelenmiş malzeme ve değişken kesitli varil tipi helisel çubuk

Çizelge 4’de görüldüğü gibi kesit değişim parametresinin ve yarıçap oranının artışı frekans değerlerini düşürmektedir. Bu iki parametrenin kullanılan değerleri için benzer etkiye sahip olduğu frekans değerlerinden anlaşılmaktadır. Malzeme değişim parametresinin frekanslar üzerindeki etkisi ise kullanılan diğer parametrelere göre oldukça düşük kalmaktadır. Ayrıca malzeme değişim parametresindeki artış frekans değerlerini de artırmaktadır.

Çizelge 4. Fonksiyonel derecelenmiş malzeme ve değişken kesitli varil tipi helisel çubuğun temel frekansları (Hz)

R_2/R_1		0,2		0,4		0,6		0,8	
β_{mat}	β_{sec}	ANSYS	Bu çalışma	ANSYS	Bu çalışma	ANSYS	Bu çalışma	ANSYS	Bu çalışma
0	0	72,00	71,87	65,70	65,54	59,74	59,65	52,19	52,14
	0,25	63,87	63,74	58,34	58,19	53,08	52,95	46,32	46,23
	0,50	57,22	57,09	52,40	52,25	47,69	47,56	41,53	41,43
	0,75	51,67	51,53	47,47	47,32	43,02	42,88	37,48	37,37
0,25	0	72,03	71,91	65,73	65,57	59,78	59,68	52,22	52,14
	0,25	64,13	64,00	58,61	58,46	53,35	53,22	46,56	46,47
	0,50	57,63	57,50	52,84	52,68	48,10	47,95	41,90	41,79
	0,75	52,17	52,03	47,99	47,83	43,44	43,29	37,92	37,82
0,5	0	72,13	72,00	65,84	65,68	59,89	59,78	52,31	52,23
	0,25	64,44	64,30	58,95	58,79	53,69	53,56	46,85	46,76
	0,50	58,08	57,95	53,32	53,16	48,54	48,40	42,31	42,21
	0,75	52,71	52,57	48,55	48,38	43,88	43,74	38,40	38,29
0,75	0	72,31	72,16	66,03	65,86	60,08	59,95	52,47	52,39
	0,25	64,81	64,66	59,35	59,19	54,08	53,94	47,19	47,09
	0,50	58,59	58,44	53,85	53,68	49,01	48,86	42,76	42,65
	0,75	53,28	53,14	49,13	48,97	44,34	44,20	38,90	38,79

Malzeme değişim parametresinin artışı diğer parametrelerin frekanslar üzerindeki etkilerinde gözle görülür bir etkiye sahip değildir. Kesit değişim ve yarıçap oranı parametreleri malzeme değişim parametresine göre daha büyük etkiye sahiptir.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada fonksiyonel derecelenmiş malzeme ve değişken kesite sahip silindirik olmayan helisel çubukların serbest titreşim frekansları parametrik bir çalışma ile araştırılmıştır. Malzeme ve kesit değişiminin üretim kaynaklı olabilmesinin haricinde korozyon ve bozulmaya uğramış malzeme ve kesitlerin bu yöntem kullanılarak modellenmesi mümkün görünmektedir.

Kayma ve aksenal uzama etkilerinin de göz önünde bulundurulduğu diferansiyel denklem takımları taşıma ve rijitlik matrisi yöntemleri bir arada kullanılarak çözülmüştür. Sistem dinamik rijitlik matrisi elde edilerek determinantını sıfır yapan frekans değerleri elde edilmiştir. Yapılan çalışma sonucunda aşağıdaki bulgular elde edilmiştir.

- Dinamik rijitlik matrisi taşıma matrisi yöntemi kullanılarak elde edilmiş ve lineer diferansiyel denklem takımının çözümünde etkili bir şekilde kullanılmıştır.
- Beklendiği gibi malzeme, kesit ve yarıçap oranı değişiminin doğal titreşim frekansları üzerinde oldukça önemli değişimler gösterdiği anlaşılmıştır.
- Malzeme değişim parametresi arttıkça doğal titreşim frekansları da artış göstermektedir.
- Kesit değişim ve yarıçap oranlarının artışı frekans değerlerinde düşüşe sebep olmaktadır.
- Malzeme değişim oranının frekanslar üzerindeki etkisi diğer iki parametreye göre daha az olduğu görülmüştür.

- Hiperbol tipi helisel çubuklarda geometri silindirik helisten uzaklaştıkça frekanslar azalmaktadır, ancak varil tipi helisel çubuklarda bu durumun tersi görülmektedir.

6. TEŞEKKÜR

Bu makalenin bir bölümü 22. Mekanik Kongresinde sözlü olarak sunulmuştur.

7. KAYNAKLAR

1. Epstein, I., 1947. The Motion of a Conical Coil Spring. *J. Appl. Phys.*, 18(4), 368–374, doi: 10.1063/1.1697660.
2. Massoud, M. P., 1965. Vectorial Derivation of the Equations for Small Vibrations of Twisted Curved Beams. *J. Appl. Mech.*, 32(2), 439–440, doi: 10.1115/1.3625823.
3. Mottershead, J.E., 1980. Finite Elements for Dynamical Analysis of Helical Rods. *Int. J. Mech. Sci.*, 22(5) 267–283, doi: 10.1016/0020-7403(80)90028-4.
4. Nagaya, K., Takeda, S., Nakata, Y., 1986. Free Vibration of Coil Springs of Arbitrary Shape. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 23(6), 1081–1099, doi: 10.1002/nme.1620230607.
5. Yildirim, V., İnce, N., 1997. Natural Frequencies of Helical Springs of Arbitrary Shape. *J. Sound Vib.*, 204(2) 311–329, doi: 10.1006/jsvi.1997.0940.
6. Yildirim, V., 1998. A Parametric Study on the Free Vibration of Non-Cylindrical Helical Springs. *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, 65(1), 157–163, doi: 10.1115/1.2789019.
7. Yildirim, V., 2002. Expressions for Predicting Fundamental Natural Frequencies of Non-Cylindrical Helical Springs. *J. Sound Vib.*, 252(3), 479–491, doi: 10.1006/jsvi.2001.4005.
8. Busool, W., Eisenberger, M., 2002. Free Vibration of Helicoidal Beams of Arbitrary Shape and Variable Cross Section. *J. Vib. Acoust. Trans. ASME*, 124(3), 397–409, doi: 10.1115/1.1468870.
9. Çalım, F.F., 2003. Viskoelastik, Anizotropik Eğri Eksenli Uzaysal Çubuk Sistemlerin Dinamik Analizi. ÇÜ Fen Bilimleri Enstitüsü,

- Doktora Tezi, Adana, 160.
10. Temel, B., Calim, F.F., 2003. Forced Vibration of Cylindrical Helical Rods Subjected to Impulsive Loads. *J. Appl. Mech.*, 70(2), 281–291, doi: 10.1115/1.1554413.
 11. Girgin, K., 2006. Free Vibration Analysis of Non-cylindrical Helices with Variable Cross-section by Using Mixed FEM. *J. Sound Vib.*, 297(3–5), 931–945, doi: 10.1016/j.jsv.2006.05.001.
 12. Calim, F.F., 2009. Dynamic Analysis of Composite Coil Springs of Arbitrary Shape. *Compos. Part B Eng.*, 40(8), 741–757, doi: 10.1016/j.compositesb.2009.04.017.
 13. Calim, F.F., 2009. Forced Vibration of Helical Rods of Arbitrary Shape. *Mech. Res. Commun.*, 36(8), 882–891, doi: 10.1016/j.mechrescom.2009.07.007.
 14. Yu, A.M., Hao, Y., 2012. Improved Riccati Transfer Matrix Method for Free Vibration of Non-cylindrical Helical Springs Including Warping, *Shock Vib.*, 19(6), 1167–1180, doi: 10.1155/2012/713874.
 15. Yu, A.M., Hao, Y., 2013. Warping Effect in Free Vibration Analysis of Unidirectional Composite Non-cylindrical Helical Springs. *Meccanica*, 48(10), 2453–2465, doi: 10.1007/s11012-013-9760-5.
 16. Yu, A.M., Hao, Y., 2013. Effect of Warping on Natural Frequencies of Symmetrical Cross-ply Laminated Composite Non-cylindrical Helical Springs. *Int. J. Mech. Sci.*, 74, 65–72, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2013.04.010.
 17. Kacar, I., Yildirim, V., 2016. Free Vibration/buckling Analyses of Non-cylindrical Initially Compressed Helical Composite Springs. *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, 44(4), 340–353, doi: 10.1080/15397734.2015.1066687.
 18. Eratli, N., Yilmaz, M., Darilmaz, K., Omurtag, M.H., 2016. Dynamic Analysis of Helicoidal Bars with Non-circular Cross-sections via Mixed FEM. *Struct. Eng. Mech.*, 57(2), 221–238, doi: 10.12989/sem.2016.57.2.221.
 19. Ermis, M., Eratlı, N., Argeso, H., Kutlu, A., Omurtag, M.H., 2016. Parametric Analysis of Viscoelastic Hyperboloidal Helical Rod. *Adv. Struct. Eng.*, 19(9), 1420–1434, doi: 10.1177/1369433216643584.
 20. Ermis, M., Omurtag, M.H., 2017. Static and Dynamic Analysis of Conical Helices Based on Exact Geometry via Mixed FEM. *Int. J. Mech. Sci.*, 131–132, 296–304, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2017.07.010.
 21. Aribas, U.N., Ermis, M., Eratli, N., Omurtag, M.H., 2019. The Static and Dynamic Analyses of Warping Included Composite Exact Conical Helix by Mixed FEM. *Compos. Part B Eng.*, 160, 285–297, doi: 10.1016/j.compositesb.2018.10.018.
 22. Aribas, U.N., Omurtag, M.H., 2019. The Static Response of Sandwich Exact Conical Helices via MFEM. *J. Struct. Eng. Appl. Mech.*, 2(4), 153–163, doi: 10.31462/jseam.2019.04153163.
 23. Calim, F.F., Cuma, Y.C., 2020. Vibration Analysis of Nonuniform Hyperboloidal and Barrel Helices Made of Functionally Graded Material. *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, 1–15, doi: 10.1080/15397734.2020.1822181.
 24. Cuma, Y.C., Calim, F.F., 2021. Free Vibration Analysis of Functionally Graded Cylindrical Helices with Variable Cross-section. *J. Sound Vib.*, 494, 115856, doi: 10.1016/j.jsv.2020.115856.
 25. İnan, M., 1964. Elastomekanikte Başlangıç Değerleri Metodu ve Taşıma Matrisi. İTÜ.