

## Piezoelektrik Levha Viskoz Akışkan ve Rijit Duvardan Oluşan Sistemin Zorlanmış Titreşimine Akışkan Özelliklerinin Etkisi

Zeynep EKİCİOĞLU KÜZECİ\*<sup>1</sup> ORCID 0000-0003-1487-6321

<sup>1</sup>Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi, Mühendislik Mimarlık Fakültesi, Makine Mühendisliği  
Bölümü, Kırşehir

Geliş tarihi: 03.02.2022

Kabul tarihi: 21.03.2022

Atf şekli/ How to cite: EKİCİOĞLU KÜZECİ, Z., (2022). Piezoelektrik Levha Viskoz Akışkan ve Rijit Duvardan Oluşan Sistemin Zorlanmış Titreşimine Akışkan Özelliklerinin Etkisi. Çukurova Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi Dergisi, 37(1), 197-208.

### Öz

Bu çalışmada piezoelektrik plak, viskoz akışkan ve rijit duvardan oluşan bir sisteme, harmonik bir mekanik kuvvet uygulandığında ortaya çıkan titreşime viskoz akışkan özelliklerinin etkisi incelenmiştir. Plağın hareketi, doğrusallaştırılmış elektro-elastisite teorisinin kesin denklemleri ile ifade edilmiştir. Akışkan akımı ise doğrusallaştırılmış Navier-Stokes denklemleri ile yazılmıştır. Plakta düzlem şekil değiştirme durumunun olduğu, akışkanın ise düzlemsel akış yaptığı varsayılmıştır. Problemin matematiksel formülasyonunu ifade eden denklemlere, sınır ve uygunluk koşullarına, plağın uzunluğu yönündeki koordinata göre Fourier dönüşümü uygulanmıştır. Ters Fourier dönüşümü ise sayısal olarak hesaplanmıştır. İncelenen hidro-piezoelektrik sistem farklı akışkanlar için ele alınmış ve akışkanın özelliklerinin, plak ve akışkan ara yüzeyindeki basınç değeri üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Sonuçlar tartışılmış ve akışkanın viskozitesinin artmasının, ara yüzeydeki basıncı mutlak değerce arttırdığı gözlemlenmiştir. Bu araştırmanın, özellikle farklı mühendislik alanlarında yapılan enerji hasadı çalışmalarına katkıda bulunması amaçlanmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Piezoelektrik plak, Viskoz akışkan, Zorlanmış titreşim, Rijit duvar, Ara yüzey basıncı

### Effect of Fluid Properties on Forced Vibration of the System Consisting of Piezoelectric Plate, Viscous Fluid and Rigid Wall

#### Abstract

This study investigates the mechanical forced vibration of the system which consists the piezoelectric plate, viscous fluid and rigid wall. The exact equations of motion of the linear electro-elasticity theory for piezoelectric materials are used to describe the plate motion, however, the fluid flow is described by using the linearized Navier-Stokes equations for a compressible (barotropic) viscous fluid. The plane-strain state in the plate and the plane flow of the fluid are considered in this study and the corresponding

\*Sorumlu yazar (Corresponding author): Zeynep EKİCİOĞLU KÜZECİ, zeynep.kuzeci@ahievran.edu.tr

mathematical problems are solved by applying the Fourier transform with respect to the space coordinate which is on the coordinate axis directed along the plate-lying direction. The inverse Fourier transforms are determined numerically. The vibration of the examined hydro-piezoelectric system is analyzed with different fluids and the influence of fluid properties on pressure value at the plate and fluid interface is investigated. Numerical results are presented and discussed. In particular, it is established that an increase in the fluid viscosity causes to increase the amplitude of the interface normal stress. This investigation aims to contribute energy harvesting studies especially in different engineering areas.

**Keywords:** Piezoelectric plate, Compressible viscous fluid, Forced vibration, Rigid wall, Interface pressure

## 1. GİRİŞ

Rijit veya esnek cisimlerin akışkan ile etkileşimi, geçmişten günümüze gelen ve çalışmaların devam ettiği bir konudur. Özellikle mekanik, fizik ve uygulamalı matematik alanlarının temel problemlerinden bir tanesiyken; mühendislik alanındaki gelişmeler ile birlikte denizcilik, havacılık, uzay ve robotik gibi sektörlerin de üzerine çalışmaya başladıkları önemli bir alan haline gelmiştir. Araştırmalarda cisimlerin matematiksel modelleri, dinamiği ve titreşimi üzerinde durulduğu görülmüştür.

Levha ile akışkan etkileşimlerinin dinamik açıdan incelenmesi ilk olarak, 1921 yılında Lamb'ın [1] çalışmasıyla başlamıştır. Daha sonraları başka yayınlarda Lamb'ın bu araştırması geliştirilmiş ve farklı yöntemler denenmiştir [2-5]. Bu konudaki araştırmalar viskoz/viskoz olmayan akışkan ve farklı plak yapılarının incelenmesi ile genişletilmiştir.

Piezoelektrik özelliği olan bir plak ve akışkandan oluşan hidro-piezoelektrik sistemin etkileşim problemi ise özellikle enerji hasadı yapılan araştırmalarda önemlidir [6-9]. Ayrıca hidro-piezoelektrik sistemler, akustik dalgaları alan (veya üreten) hidro-akustik dönüştürücü çalışmalarında da kullanılmaktadırlar [10-12]. Piezoelektrik plak ve akışkan etkileşiminden enerji hasadı yapan sistemler havacılık alanında da çalışılmaktadır. Bu alanda özellikle otonom sensör teknolojilerinin geliştirilmesinde araştırılmaktadır [13]. Literatüre bakıldığında hidro-piezoelektrik

sistemlerin dinamiği üzerine yapılan teorik çalışmaların henüz yeterli olmadığı görülmüştür.

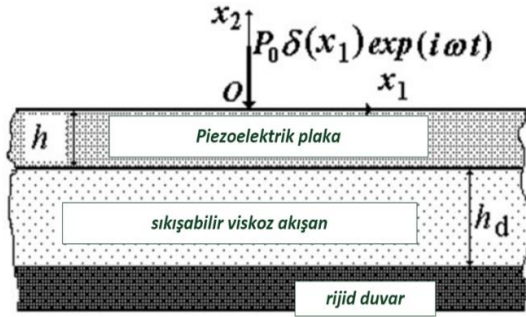
Bu çalışmanın temelini oluşturan, akışkan ile elastik/visko-elastik malzemeden oluşan plağın etkileşimini inceleyen yayınlar ve ayrıntıları Akbarov'un [14] derleme makalesinde verilmiştir. Piezoelektrik plak, viskoz akışkan ve rijit duvardan oluşan sistemin zorlanmış titreşiminin çalışıldığı yazara ait doktora tezinde ise farklı piezoelektrik malzemeler ile gliserinin etkileşimi incelenmiş ve farklı PZT malzemelerinin piezoelektriklik özelliğinin, incelenen parametrelere etkisi analiz edilmiştir [15].

Bu çalışmada ise, piezoelektrik plak viskoz akışkan ve rijit duvardan oluşan sistemin zorlanmış titreşimine akışkan özelliklerinin etkisi öğrenilmek istenmiştir. Bu kapsamda dört farklı akışkan incelenmiş ve akışkan viskozitelerinin, ara yüz düzlemi gerilmesi üzerindeki etkileri sorgulanmıştır. Özellikle enerji hasadı yapan sistemlerde enerji eldesinin hesabı için gerilme bilgisi önem arz etmektedir. Ayrıca farklı alanlarda hidro-piezoelektrik sistemlerin kullanıldığı düşünülmüş ve farklı akışkanlar seçilerek araştırma genişletilmiştir.

## 2. ALAN DENKLEMLERİ VE FORMÜLASYON

Bu çalışmada piezoelektrik plak, sıkıştırılabilir (barotropik) viskoz akışkan ve rijit duvardan oluşan hidro-piezoelektrik sistem incelenmiştir. Sistemin şeması Şekil 1'de verilmiştir. Plağın üst yüzeyinde  $Ox_1x_2x_3$  kartezyen koordinat sistemi

tanımlanmıştır. Piezoelektrik plak,  $\{-\infty < x_1 < +\infty; -h < x_2 < 0; -\infty < x_3 < +\infty\}$  bölgesini, akışkan ise,  $\{-\infty < x_1 < +\infty; -h-h_d < x_2 < -h; -\infty < x_3 < +\infty\}$  bölgesini kapsamaktadır. Ayrıca  $h$  plak kalınlığını,  $h_d$  ise akışkanın derinliğini, yani plağın alt yüzeyinin rijit duvara olan uzaklığını göstermektedir. Koordinat sistemine göre  $Ox_3$  yönü, şekil düzlemine diktir ve plaktaki düzlem şekil değiştirme durumu iki boyutlu  $Ox_1x_2$  yönlerinde ele alınacağı için,  $Ox_3$  yönü Şekil 1'de gösterilmemiştir.



Şekil 1. Araştırılan hidro-piezoelektrik sistemin çizimi

Bununla birlikte,  $(-\infty < x_3 < +\infty, x_1 = 0)$  koordinatında, şiddeti  $P_0$  olan zamana göre harmonik kuvvetin plağın üst yüzeyine uygulandığı kabul edilmiştir.

Bu çerçevede, söz konusu hidro-piezoelektrik sistemi oluşturan mekanik ve elektriksel alanların matematiksel ifadelerinin, bunlara karşılık gelen kesin alan denklemleri ve ilişkileri ile belirlenmesi gerekmektedir. Bu amaçla her bir sistem bileşeni için alan ve bünye denklemleri yazılmıştır. İlk olarak plağın hareket denklemleri Eşitlik 1-3'te verilmiştir.

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_2}{\partial x_2} = 0 \quad (3)$$

Piezoelektrik levhaya ait, elektro-mekanik ilişkileri ifade eden bünye denklemleri ise (4)-(8) denklemleri ile verilmiştir. Bu denklemler, plağın kalınlık doğrultusunda polarizasyona sahip olduğu durum için geçerlidir.

$$\sigma_{11} = c_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{13} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \quad (4)$$

$$\sigma_{22} = c_{13} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{33} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \quad (5)$$

$$\sigma_{12} = c_{44} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \quad (6)$$

$$D_1 = e_{15} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) - \epsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \quad (7)$$

$$D_2 = e_{31} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + e_{33} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \epsilon_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \quad (8)$$

Bu eşitliklerde;  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$  mekanik gerilme tensörünün bileşenlerini,  $u_1, u_2$  mekanik yer değiştirme vektörünün bileşenlerini,  $D_1$  ve  $D_2$  elektriksel yer değiştirme vektörünün bileşenlerini,  $\varphi$  elektriksel potansiyeli,  $c_{11}, c_{33}, c_{13}$  ve  $c_{44}$  elastik sabitleri,  $e_{31}, e_{33}$  ve  $e_{15}$  piezoelektrik sabitleri,  $\epsilon_{11}$  ve  $\epsilon_{33}$  dielektrik sabitleri göstermektedir. Sistemdeki sıkıştırılabilir viskoz akışkan akımına ait doğrusallaştırılmış Navier-Stokes (9) ve (10) ile süreklilik (11) eşitlikleri ise aşağıdaki gibi yazılmıştır;

$$\rho_0^{(i)} \frac{\partial V_1}{\partial t} - \mu^{(i)} \left( \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial p^{(i)}}{\partial x_1} - (\mu^{(i)} + \lambda^{(i)}) \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = 0 \quad (9)$$

$$\rho_0^{(i)} \frac{\partial V_2}{\partial t} - \mu^{(i)} \left( \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial p^{(i)}}{\partial x_2} - (\mu^{(i)} + \lambda^{(i)}) \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial p^{(i)}}{\partial t} + \rho_0^{(i)} \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right) = 0 \quad (11)$$

Akışkana ait verilen bu denklemlerin, aşağıdaki akışkana ait bünye eşitliklerini 12-15 ve durum denklemini Eşitlik 16'nın sağlanması gerekmektedir.

$$T_{11} = -p^{(1)} + \lambda^{(1)}\theta + 2\mu^{(1)}e_{11} \quad (12)$$

$$T_{22} = -p^{(1)} + \lambda^{(1)}\theta + 2\mu^{(1)}e_{22} \quad (13)$$

$$T_{33} = -p^{(1)} + \lambda^{(1)}\theta \quad (14)$$

$$T_{12} = 2\mu^{(1)}e_{12} \quad (15)$$

$$p^{(1)} = a_0^2 \rho^{(1)}, \quad a_0^2 = \frac{\partial p_0^{(1)}}{\partial \rho_0^{(1)}} \quad (16)$$

burada,  $e_{11} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1}$ ,  $e_{22} = \frac{\partial V_2}{\partial x_2}$ ,  $e_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right)$ ,  
 $\theta = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2}$  olarak alınır.

Yukarıda verilen ifadelerde;  $\rho_0^{(1)}$  pertürbasyondan önceki akışkan yoğunluğunu,  $p_0^{(1)}$  pertürbasyondan önceki hidrostatik basıncı,  $\rho^{(1)}$  akışkan yoğunluğunun pertürbasyonunu,  $p^{(1)}$  hidrostatik basıncın pertürbasyonunu,  $V_1$  ve  $V_2$  sırasıyla  $Ox_1$  ve  $Ox_2$  eksenleri yönündeki akış hızı vektörünün bileşenlerini,  $T_{ij}$  ve  $e_{ij}$  ( $ij=11;22;12$ ) akışkanın gerilme ve şekil değiştirme hızı tensörü bileşenlerini,  $a_0$  akışkandaki ses hızını,  $\lambda^{(1)}$  ikinci viskozite sabitini ve  $\mu^{(1)}$  dinamik viskoziteyi temsil etmektedir.  $V_1, V_2$  hızlarının ve  $p^{(1)}$  basıncının potansiyeller cinsinden ifadeleri aşağıdaki (17)-(19) eşitlikleri ile akışkan alan denklemlerine eklenir [15].

$$V_1 = \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x_2} \quad (17)$$

$$V_2 = \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x_1} \quad (18)$$

$$p^{(1)} = \rho_0^{(1)} \left( \frac{\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}}{\rho_0^{(1)}} \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi^{(1)} \quad (19)$$

Ayrıca potansiyeller aşağıda verilen eşitlikleri sağlamaktadır.

$$\left[ \left( 1 + \frac{\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}}{a_0^2 \rho_0^{(1)}} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \varphi^{(1)} = 0 \quad (20)$$

$$\left( v^{(1)} \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi^{(1)} = 0 \quad (21)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad (22)$$

Burada  $v^{(1)}$  kinematik viskozitedir ve  $v^{(1)} = \mu^{(1)} / \rho_0^{(1)}$  ile hesaplanmaktadır. Eğer  $p^{(1)} = -(T_{11} + T_{22} + T_{33})/3$  olarak kabul edilirse,  $\lambda^{(1)} = -2\mu^{(1)}/3$  olarak bulunur.

Plaçın üst yüzüne ait sınır koşulları, plaçın alt yüzünde (plak ve akışkan ara düzleminde) sağlanan temas koşulları ve rijit duvar üzerindeki sızdırmazlık koşulları sırasıyla Eşitlik 23-25 ile ifade edilmiştir.

$$\sigma_{21}|_{x_2=0} = 0, \quad \sigma_{22}|_{x_2=0} = -P_0 \delta(x_1) e^{i\omega t} \quad (23)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} \Big|_{x_2=h} = V_1 \Big|_{x_2=h}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} \Big|_{x_2=h} = V_2 \Big|_{x_2=h},$$

$$\sigma_{21}|_{x_2=h} = T_{21}|_{x_2=h}, \quad \sigma_{22}|_{x_2=h} = T_{22}|_{x_2=h} \quad (24)$$

$$V_1|_{x_2=h-h_d} = 0, \quad V_2|_{x_2=h-h_d} = 0 \quad (25)$$

burada  $\delta(x_1)$ , Dirac delta fonksiyonudur.

Bu çalışmada sistemin elektriksel alanı için kabul edilen iki sınır koşulu, Eşitlik 26'da ifade edilmiştir. Bu sınır koşulu ile plaçın elektriksel açık devre olduğu kabul edilmiştir.

$$D_2|_{x_2=0} = 0, \quad D_2|_{x_2=h} = 0 \quad (26)$$

### 3. ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Zamana bağlı harmonik titreşimin özelliği göz önüne alınarak, problemin tüm aranan ifadeleri,  $g(x_1, x_2, t) = \bar{g}(x_1, x_2) e^{i\omega t}$  biçiminde gösterilmiştir. Böylece;  $\partial(\cdot)/\partial t$  ve  $\partial^2(\cdot)/\partial t^2$  türevleri yerine, sırasıyla  $i\omega(\cdot)$  ve  $-\omega^2(\cdot)$  yazılmıştır. Aranan ifadelerin genlikleri, sınır, temas ve sızdırmazlık

koşullarında uygun yerlere yazılmıştır. Elde edilen bu sınır değer problemlerinin çözümü için, Eşitlik 27'deki Fourier dönüşümü uygulanmıştır.

$$f_F(s, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) e^{-isx_1} dx_1 \quad (27)$$

Plağa ait bünye denklemleri, plağın hareket denklemlerinde yerine yazılarak piezoelektrik malzeme polarizasyon doğrultusunun  $Ox_2$  eksenine ile çakıştığı durum için plağın elektromekanik hareket denklemleri, mekanik yer değiştirmeler ve elektrik potansiyeli cinsinden aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\left( \frac{c^2}{s^2} - \tilde{c}_{11} \right) u_{1F} + \frac{d^2 u_{1F}}{d(sx_2)^2} - i(1 + \tilde{c}_{13}) \frac{du_{2F}}{d(sx_2)} - i(1 + \tilde{e}_{31}) \frac{d\tilde{\varphi}_F}{d(sx_2)} = 0 \quad (28)$$

$$-i(1 + \tilde{c}_{13}) \frac{du_{1F}}{d(sx_2)} + \left( \frac{c^2}{s^2} - 1 \right) u_{2F} + \tilde{c}_{33} \frac{d^2 u_{2F}}{d(sx_2)^2} - \tilde{\varphi}_F + \tilde{e}_{33} \frac{d^2 \tilde{\varphi}_F}{d(sx_2)^2} = 0 \quad (29)$$

$$-i(1 + \tilde{e}_{31}) \frac{du_{1F}}{d(sx_2)} + \tilde{e}_{33} \frac{d^2 u_{2F}}{d(sx_2)^2} - u_{2F} + \tilde{e}_{11} \tilde{\varphi}_F - \tilde{e}_{33} \frac{d\tilde{\varphi}_F}{d(sx_2)} = 0 \quad (30)$$

burada  $c^2 = \omega^2 h^2 / c_{44} / \rho$ ,  $\tilde{c}_{11} = c_{11} / c_{44}$ ,  $\tilde{c}_{13} = c_{13} / c_{44}$ ,  $\tilde{e}_{31} = e_{31} / e_{15}$ ,  $\tilde{c}_{33} = c_{33} / c_{44}$ ,  $\tilde{e}_{33} = e_{33} / e_{15}$ ,  $\tilde{\varphi}_F = e_{15} / c_{44} \varphi_F$ ,  $\tilde{e}_{11} = \epsilon_{11} c_{44} / \epsilon_{15}^2$ ,  $\tilde{e}_{33} = \epsilon_{33} c_{44} / \epsilon_{15}^2$  olarak kabul edilmiştir.

Eşitlik 28-30'da verilen diferansiyel denklemlerin çözümü için, Euler metoduna göre sistemin özel çözümleri Eşitlik 31'de ki gibi ifade edilmiştir. Buradaki A, B, C sabitleri uygulanan çözüm yöntemi ile bulunacak olan bilinmeyen sabitlerdir.

$$u_{1F} = iAe^{bsx_2}, u_{2F} = Be^{bsx_2}, \tilde{\varphi}_F = Ce^{bsx_2} \quad (31)$$

Eşitlik 31'de verilen özel çözüm ifadeleri (28-30) nolu diferansiyel denklemlerinde yerine yazılır ve bazı matematiksel işlemler neticesinde homojen denklem takımı elde edilir. Bu denklem takımının katsayılar matrisinin determinanı sıfıra eşitlenerek, sıfırdan farklı 6 tane kök bulunmuştur (Matematiksel işlemlerin ayrıntıları için [15]'e bakılabilir.). Kullanılan çözüm yöntemine göre ve Eşitlik 31'de verilen özel çözüm ifadeleri göz

önüne alınarak, diferansiyel denklem takımının çözümü Eşitlik 32'de verilmiştir.

$$\begin{aligned} u_{1F} &= iA_1 e^{b_1 sx_2} + \dots + iA_6 e^{b_6 sx_2} \\ u_{2F} &= A_1 Y_1 e^{b_1 sx_2} + \dots + A_6 Y_6 e^{b_6 sx_2} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\varphi_F = A_1 Z_1 e^{b_1 sx_2} + \dots + A_6 Z_6 e^{b_6 sx_2}$$

burada,

$$Y_k = \frac{-(b_k + \alpha_{11})(\tilde{\epsilon}_{11} - \tilde{\epsilon}_{33} b_k^2) - \alpha_{31} \alpha_{13} b_k^2}{\tilde{e}_{13} b_k (\tilde{e}_{13} b_k^2 - 1) - \alpha_{12} b_k (\tilde{\epsilon}_{11} - \tilde{\epsilon}_{13} b_k^2)} \quad (33)$$

$$Z_k = \frac{(b_k^2 + \alpha_{11})(\tilde{e}_{13} b_k^2 - 1) + \alpha_{31} \alpha_{12} b_k^2}{\tilde{e}_{13} b_k (\tilde{e}_{13} b_k^2 - 1) - \alpha_{12} b_k (\tilde{\epsilon}_{11} - \tilde{\epsilon}_{13} b_k^2)}$$

Eşitlik 32'de verilen ifadeler, plağa ait elektromekanik bünye Eşitlik 4-8'de Fourier dönüşümü uygulanmış ifadelerinde yerine yazılır. Böylece gerilme ve elektrik potansiyel ifadeleri elde edilir.

Akışkana ait ifadelerin Fourier dönüşümünün bulunması ise, akışkana ait hızların ve basıncın Fourier dönüşümünün bulunması için,  $\varphi_F^{(1)}$  ve  $\psi_F^{(1)}$  ifadeleri aşağıdaki gibi alınır.

$$\varphi_F^{(1)} = \omega h^2 \tilde{\varphi}_F^{(1)}, \quad \psi_F^{(1)} = \omega h^2 \tilde{\psi}_F^{(1)} \quad (34)$$

Eşitlik 20-22 ve 34 kullanılarak ve bazı matematiksel işlemlerden sonra, Eşitlik 35 elde edilmiştir.

$$\frac{d^2 \tilde{\varphi}_F^{(1)}}{dx_2^2} + \left( \frac{\Omega_1^2}{1 + i4\Omega_1^2 / (3N_w^2)} - s^2 \right) \tilde{\varphi}_F^{(1)} = 0, \quad (35)$$

$$\frac{d^2 \tilde{\psi}_F^{(1)}}{dx_2^2} - (s^2 + iN_w^2) \tilde{\psi}_F^{(1)} = 0$$

Eşitlik 35'de yer alan, sırasıyla akışkan viskozitesinin ve akışkan sıkıştırılabilirliğinin etkisini karakterize eden boyutsuz sayıların ifadesi ise  $\Omega_1 = \frac{\omega h}{a_0}$ ,  $N_w^2 = \frac{\omega h^2}{\nu^{(1)}}$  olarak verilmiştir.

Eşitlik 35’de verilen diferansiyel denklemin çözümü, aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\tilde{\Phi}_F^{(1)} = A_7 e^{\delta_1 x_2} + A_8 e^{-\delta_1 x_2}, \quad (36)$$

$$\tilde{\Psi}_F^{(1)} = A_9 e^{\gamma_1 x_2} + A_{10} e^{-\gamma_1 x_2}$$

burada,  $A_7, A_8, A_9, A_{10}$  bilinmeyen sabitlerdir ve  $\delta_1 = \sqrt{s^2 - \frac{\Omega_1^2}{1 + i4\Omega_1^2/(3N_w^2)}}$ ,  $\gamma_1 = \sqrt{s^2 + iN_w^2}$  olarak verilir. Eşitlik 34 ve 36’da verilen ifadeler ile akışkana ait ilişkileri veren denklemlerde yerine yazılmıştır. Böyle akışkan akımıyla ilgili büyüklüklerin Fourier dönüşümü ifadeleri sınır koşullarında kullanılmak üzere elde edilmiş olur.

Plak hareketine ve akışkan akımına ait büyüklerin Fourier dönüşümü ifadeleri; sınır, temas ve sızdırmazlık koşullarında Eşitlik 23-25 yerine yazılarak, sisteme ait on tane denklem elde edilir (Denklemlerin ayrıntıları [15]’de verilmiştir). Çözüm yönteminde son aşama, ters Fourier dönüşümlerinin sayısal hesaplamalarının yapılmasıdır. Geliştirilen algoritmada; ters Fourier dönüşümleri Gauss integrasyon algoritması ile hesaplanmıştır. Bu yöntemde  $g(x_1, x_2, t) = \tilde{g}(x_1, x_2) e^{i\omega t}$  ilişkisi kullanılmış ve aranan değerler Eşitlik 37’de verilen ifade ile bulunmuştur.

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{11}, D_1, D_2, \phi, u_1, u_2, T_{22}, T_{12}, T_{11}, \\ V_1, V_2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2\pi} \text{Re} \left\{ e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \begin{array}{c} \sigma_{22F}, \sigma_{12F}, \sigma_{11F}, D_{1F}, \\ D_{2F}, \phi_F, u_{1F}, u_{2F}, T_{22F}, \\ T_{12F}, T_{11F}, V_{1F}, V_{2F} \end{array} \right] e^{isx_1} ds \right\} \quad (37)$$

Ayrıca yazılan algoritma gereğince;  $\int_{-\infty}^{\infty} (\cdot) ds$  integralinin yerini,  $\int_{-S_1^*}^{S_1^*} (\cdot) ds$  belirli integrali almıştır.  $S_1^*$  değeri, sayısal sonuçların yakınsama gereksimine göre belirlenmiştir. Bu integrasyon aralığı, Gauss integrasyon metodunda kullanılan  $N$  sayıda küçük aralığa bölünmüştür.  $S_1^*$  ve  $N$  değerleri, oluşturulan MATLAB algoritması ile

sayısal sonuçların yakınsama gereksimine göre belirlenmiştir.

## 4. SAYISAL SONUÇLAR

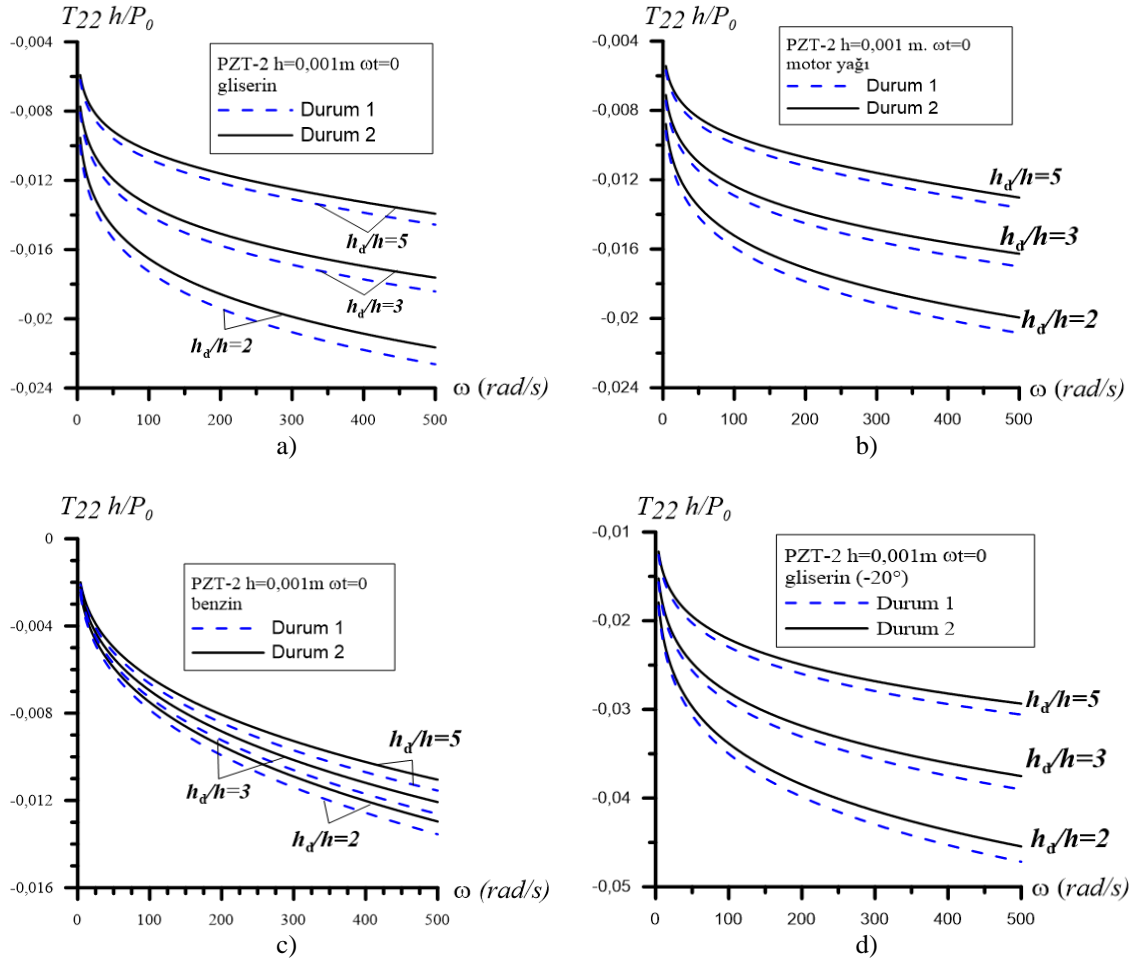
Bu çalışmada verilen tüm sayısal sonuçlar, plak-akışkan ara yüzündeki gerilme parametresi için elde edilmiştir. Sayısal sonuçların analizinde asıl dikkat edilmesi gereken nokta; akışkan özelliklerinin incelenen büyüklüğün frekans cevaplarına etkisi olmuştur. Aynı zamanda, piezoelektriklik özelliğın, plak kalınlığının ( $h$ ), ve plak kalınlık/akışkan derinliği oranının ( $h_d/h$ ) frekans cevaplarına etkisine bakılmıştır. Sayısal sonuçlar Çizelge 1’de verilen plak malzemesi ve akışkanlara ait özellikler kullanılarak hesaplanmıştır.

### 4.1. Ara yüz Gerilmesi Frekans Cevapları

Bu bölümde  $x_1/h=0$  noktasında hesaplanan, plak ve akışkan ara yüz düzlemindeki boyutsuz  $T_{22}h/P_0$  normal gerilmesinin frekans cevabı grafikleri verilmiştir. Bu grafiklerde akışkanın özelliklerinin gerilme değeri üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Frekans cevabı önemli ölçüde titreşim fazına bağlı olduğundan, fazın  $\omega t = 0$  ve  $\omega t = \pi/2$  olduğu durumlar dikkate alınmıştır. Faz seçiminin ayrıntıları için [16] çalışmasına bakılabilir. Boyutsuz  $T_{22}h/P_0$  gerilmesinin,  $h=0.001$ m olduğu ve sırasıyla  $h_d/h=2,3,5$  kabul edildiği durum için frekans cevabı grafikleri Şekil 2’de gösterilmiştir. Şekilde plak malzemesi olarak PZT-2 kullanılmıştır ve a,b,c,d grafiklerinde akışkan olarak sırasıyla; gliserin, motor yağı, benzin ve düşük sıcaklıkta gliserin alınmıştır. Ayrıca grafiklerdeki kesikli çizgiler, plak malzemesinin elektromekanik etkisinin göz önüne alınmadığı (Durum 1 yani,  $e_{31}=e_{33}=e_{15}=0$  ve  $\epsilon_{11}=\epsilon_{33}=0$ ) durumu göstermektedir. Sürekli çizgiler ise, plak malzemesinin elektromekanik etkisinin göz önüne alındığı (durum 2 yani,  $e_{31} \neq e_{33} \neq e_{15} \neq 0$  ve  $\epsilon_{11} \neq \epsilon_{33} \neq 0$ ) durumu ifade etmektedir.

**Çizelge 1.** Seçilen akışkanlara ve piezoelektrik malzemeye ait özellikler

Akışkan	Yoğunluk ( $\text{kg/m}^3$ )		Dinamik viskozite $\text{kg/(m.s)}$		Ses hızı ( $\text{m/s}$ )
Gliserin	1260		1,393		1927
Motor Yağı	911		0,86		1461
Benzin	750		0,0006		1250
Gliserin (-20°)	1160		134		1827
Plak Malzemesi	$e_{31}$ ( $\text{C/m}^2$ )	$e_{33}$ ( $\text{C/m}^2$ )	$e_{15}$ ( $\text{C/m}^2$ )	$\epsilon_{11} \times 10^{-8}$ ( $\text{F/m}$ )	$\epsilon_{33} \times 10^{-8}$ ( $\text{F/m}$ )
PZT-2	-1,9	9,0	9,8	8,7615	3,9825
Plak Malzemesi	$c_{44} \times 10^{-10}$ ( $\text{N/m}^2$ )	$c_{11} \times 10^{-10}$ ( $\text{N/m}^2$ )	$c_{13} \times 10^{-10}$ ( $\text{N/m}^2$ )	$c_{33} \times 10^{-10}$ ( $\text{N/m}^2$ )	$\rho$ ( $\text{kg/m}^3$ )
PZT-2	2,22	13,5	6,81	11,3	7600

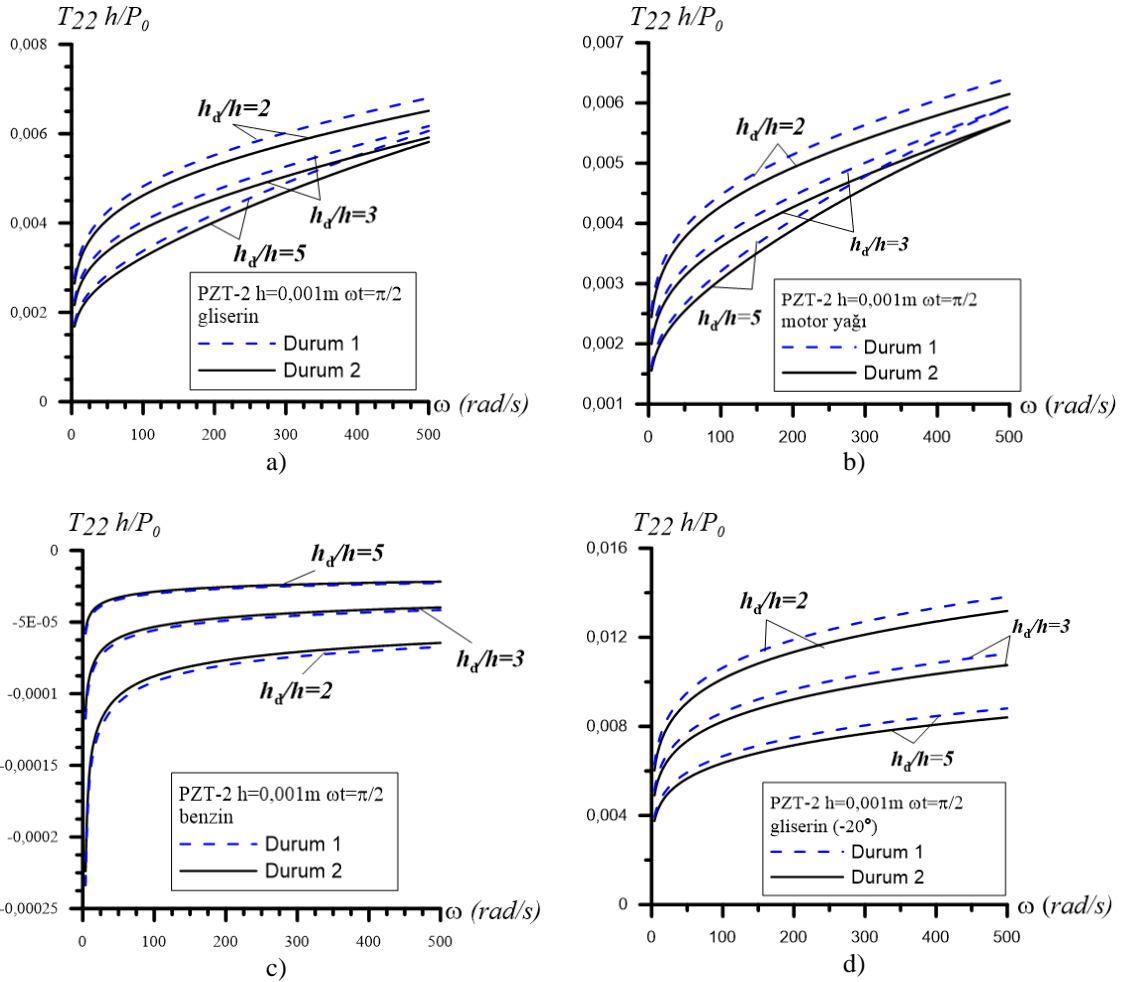
**Şekil 2.** Plak kalınlığının ( $h$ )=0.001m ve titreşim fazı ( $\omega$ )=0 alındığında a) gliserin b) motor yağı c) benzin ve d) gliserin (-20°) akışkanlarını içeren sistemlere ait ara yüz gerilmesi frekans cevapla

### Piezoelektrik Levha Viskoz Akışkan ve Rijit Duvardan Oluşan Sistemin Zorlanmış Titreşimine Akışkan Özelliklerinin Etkisi

Grafiklerdeki kesikli çizgiler ile sürekli çizgiler arasındaki fark, plak malzemesinin PZT özellik taşıması/taşıması durumları arasındaki farkı yani, elektromekanik etkinin tesirini göstermektedir.

Şekil 2'deki sayısal sonuçlar titreşim frekansının  $4 \text{ (rad/s)} \leq \omega \leq 500 \text{ (rad/s)}$  aralığında kabul edildiği ve titreşim fazının sıfır olduğu durumlar için elde edilmiştir. Bu frekans aralığında, ara yüz düzlemindeki gerilmenin mutlak değeri,  $\omega$  ile monoton olarak artmaktadır. Akışkan

viskozitesinin daha büyük olduğu sistemlerde ara yüz düzlemindeki gerilme mutlak değerce daha büyüktür. Akışkan viskozitesinin etkisini daha net görebilmek için, düşük sıcaklıktaki gliserin, diğer akışkanlara kıyasla oldukça yüksek viskozitesi nedeniyle araştırmaya dahil edilmiştir. Şekil 2'den görüldüğü gibi viskozite arttığında ara yüz gerilme değeri mutlak değerce artmaktadır. Elektromekanik etki ise, tüm akışkan grafiklerindeki gerilme değerinin mutlak değeri üzerinde azaltıcı bir etkiye sahip olmaktadır.



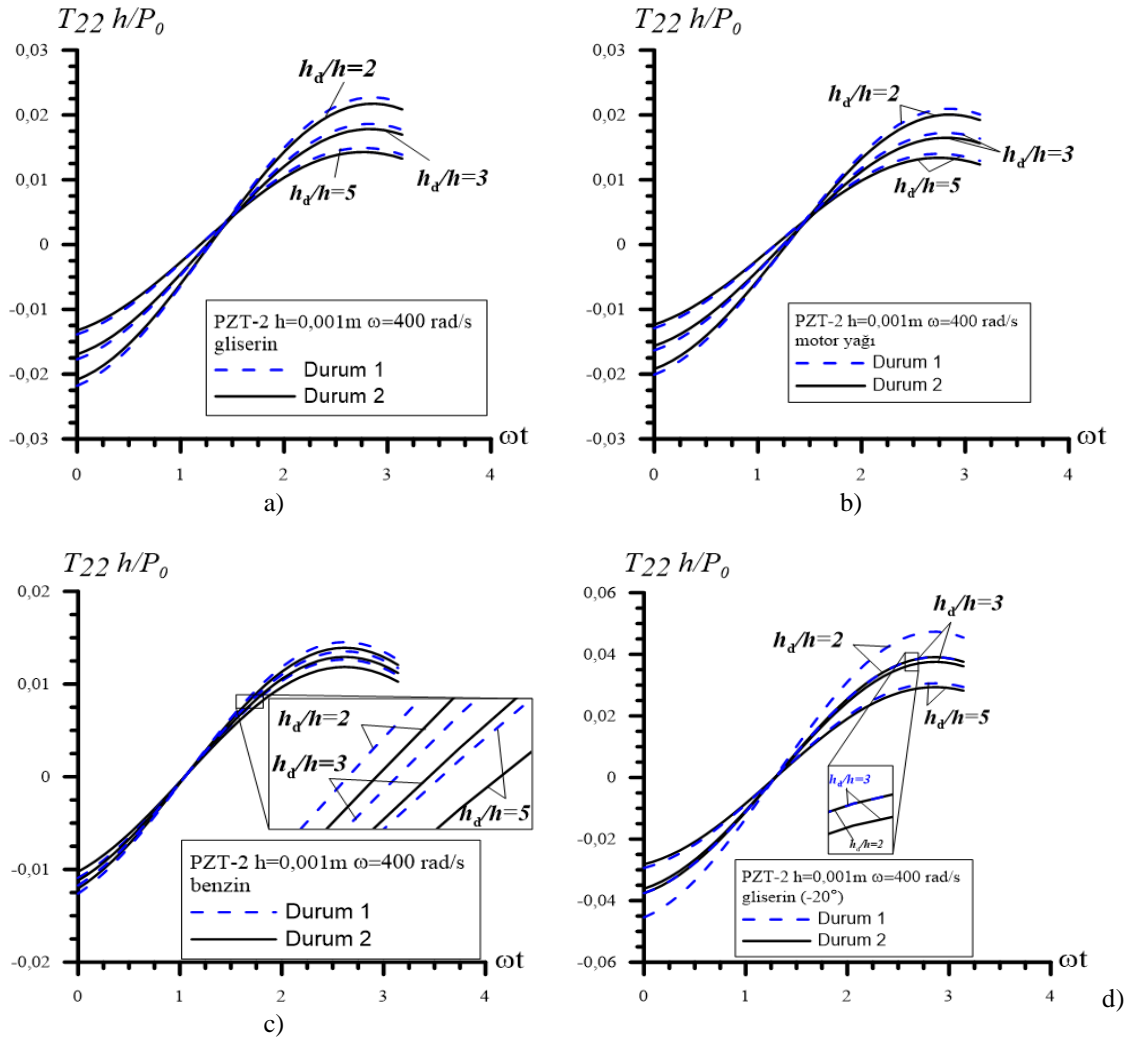
Şekil 3. Plak kalınlığı ( $h$ )=0,001m ve titreşim fazı ( $\omega t$ ),  $\pi/2$  alındığında a) gliserin b) motor yağı c) benzin ve d) gliserin (-20°) akışkanlarını içeren sistemlere ait ara yüz gerilmesi frekans cevapları



Şekil 3’de ise titreşim fazının  $\omega t = \pi/2$  ve plak kalınlığının  $h=0.001\text{m}$  olduğu durumda, farklı akışkanlardan oluşan sistemin ara yüz düzlemi gerilmesi frekans cevabı grafikleri verilmiştir. Şekil 2 ve Şekil 3’de verilen sonuçlardan yola çıkılarak, titreşim fazının ara yüz düzlemi gerilmesinin frekans cevabı üzerinde etkili olduğu anlaşılmıştır. Şekil 2’de  $\omega t=0$  titreşim fazında, tüm ara yüz gerilme eğrileri negatif bölgedeyken, Şekil 3’de  $\omega t=\pi/2$  titreşim fazında ara yüz

gerilme eğrilerinin hepsinin yön değiştirdiği görülmektedir.

Titreşim fazının ara yüz düzlemi gerilmesine etkisinin daha iyi anlaşılması için, Şekil 4’de ara yüz gerilmesi ile titreşim fazı bağımlılığını gösteren dört farklı akışkana ait grafikler verilmiştir. Bu şekilde  $\omega=400\text{ rad/s}$  alınmış olup, a, b, c, d grafikleri sırasıyla gliserin, motor yağı, benzin ve düşük sıcaklıklı gliserin akışkanlarına aittir.

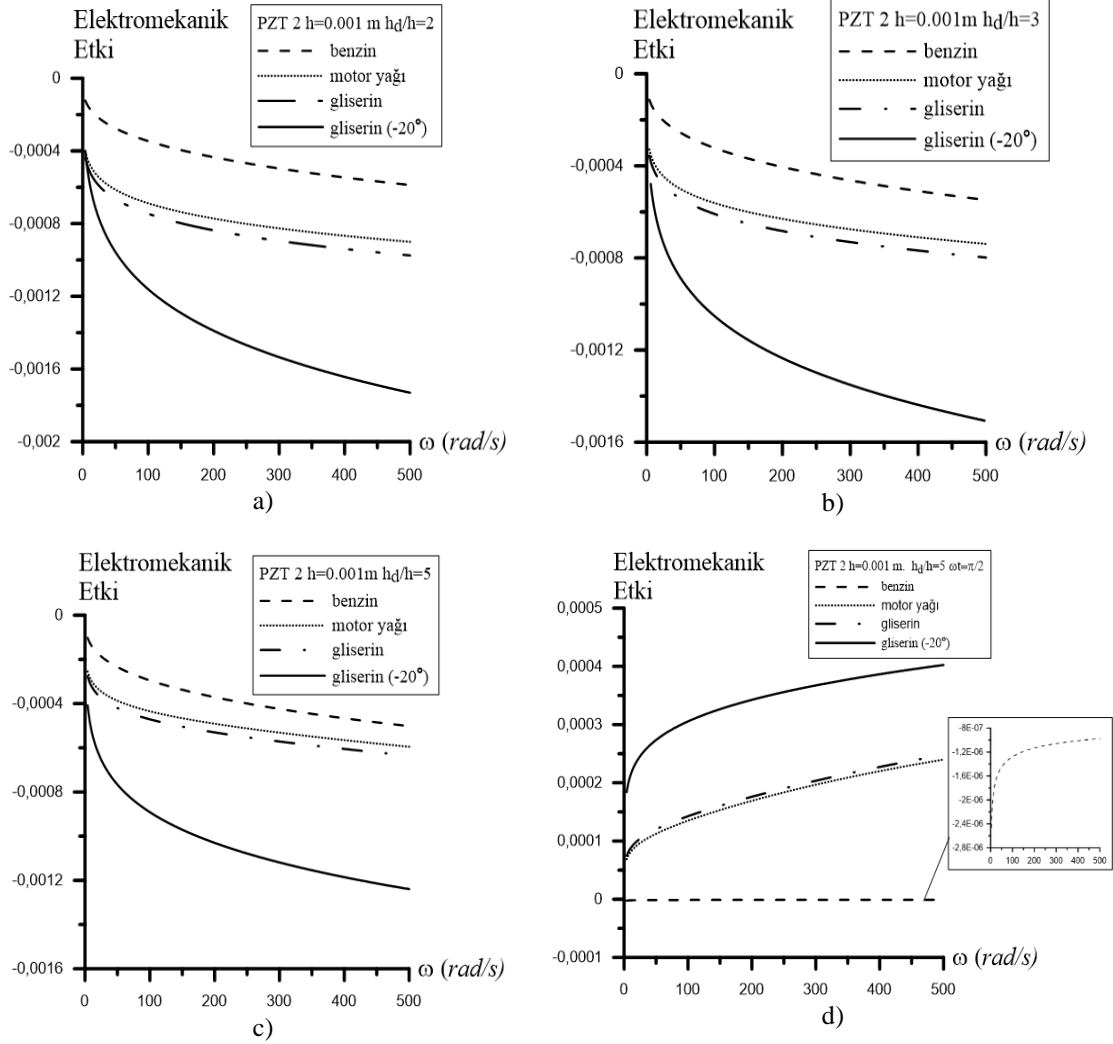


Şekil 4. Plak kalınlığı ( $h$ )=0.001m ve titreşim frekansı  $\omega=400\text{ rad/s}$  alındığında, a) gliserin b) motor yağı c) benzin ve d) gliserin ( $-20^\circ$ ) akışkanlarını içeren sistemlere ait ara yüz gerilmesi-titreşim fazı arasındaki bağıntı eğrileri

*Piezoelektrik Levha Viskoz Akışkan ve Rijit Duvardan Oluşan Sistemin Zorlanmış Titreşimine Akışkan Özelliklerinin Etkisi*

Plak malzemesinin elektromekanik özelliği, tüm akışkanların ara yüz düzlemi gerilmesinin mutlak değeri üzerinde düşüşe neden olmuştur. Bu düşüş

miktarının akışkan viskozitesi ile bağıntısını incelemek için Şekil 5'deki eğrilere bakılabilir.



**Şekil 5.** Plak kalınlığı ( $h$ )=0.001m ve titreşim fazı ( $\omega t$ )=0 alındığında, a)  $h_d/h = 2$  b)  $h_d/h = 3$  c)  $h_d/h = 5$  için ve d) titreşim fazı  $\omega t = \pi/2$  alındığında,  $h_d/h = 5$  için, Durum 1 ve Durum 2'nin sayısal farkına ait grafikler

Şekil 5'de Durum 1 ve Durum 2 için elde edilen sayısal sonuçların farkına ait grafikler tüm akışkanlar için verilmiştir. Şekil 5'de elektromekanik etkinin neden olduğu, azalma miktarları farklı viskozitelere sahip akışkanlar için verilmiştir. Elektromekanik etki, viskozitesi büyük olan akışkanın ara yüz gerilmesinin mutlak değeri

üzerinde daha fazla azalmaya sebep olmuştur. Akışkanın viskozitesinin azalmasıyla gerilme mutlak değerindeki düşüş miktarı azalmıştır. Ayrıca akışkan derinliği/plak kalınlığı ( $h_d/h$ ) değeri arttıkça elektromekanik özelliğinin etkisi azalmıştır.

Diğer yandan titreşim fazının da plağın elektromekanik etkisini değiştirdiği görülmüştür. Şekil 5’de ki c ve d eğrileri karşılaştırıldığında, titreşim fazının sıfır olduğu durumda, ara yüz gerilmesi üzerindeki elektromekanik etkinin mutlak değerce daha fazla olduğu görülmüştür.

#### 4. SONUÇLAR

Piezoelektrik plak ve sonlu derinlikte sıkıştırılabilir viskoz akışkandan oluşan sistemin mekanik zorlanmış titreşimi incelenmiştir. Plağın hareketi, elasto-elektro dinamiğin piezoelektrik malzemeler için olan kesin denklemleri ile ifade edilmiştir. Akışkanın akım denklemleri ise, doğrusallaştırılmış Navier-Stokes denklemleri ile verilmiştir. Çalışmanın temel amacı; akışkan özelliklerinin, akışkan ve plak ara düzlemindeki basınca (normal gerilme değerine) nasıl etkidiğini araştırmaktır. Yapılan teorik çalışmalarda; plak malzemesi PZT-2 olarak seçilmiş olup, sisteme uygulanan mekanik kuvvetin frekansı  $4(\text{rad/s}) \leq \omega \leq 500(\text{rad/s})$  aralığında kabul edilmiştir. Akışkan olarak ise gliserin, motor yağı, benzin ve düşük sıcaklıklı ( $-20^\circ$ ) gliserin akışkanları incelenmiştir.

Akışkan viskozitesinin artışıyla, plak akışkan ara yüz düzlemindeki basıncın mutlak değerinde artış olmaktadır. Tüm grafiklerde, piezoelektrik etki plak akışkan ara yüz düzlemindeki basıncın mutlak değerce azalmasına neden olmaktadır. Piezoelektrik etki, akışkanın viskozitesi arttıkça artmaktadır. Bu çalışma kapsamında akışkan ve piezoelektrik plak etkileşiminin olduğu sistemin dinamik davranışının analizi için bir algoritma geliştirilmiştir. Bu yöntem özellikle plağın sonsuz uzunlukta modellendiği birçok araştırma için kullanılabilir. Çalışmada viskozitesi farklı akışkanlar kullanılarak, bu sistemin değişik çalışma alanlarında ve koşullarda kullanıldığında elde edilecek sonuçlar incelenmiştir.

#### 5. TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın bir kısmı, 6-10 Eylül 2021 tarihlerinde Çukurova Üniversitesi’nde gerçekleştirilen 22. Ulusal Mekanik Kongresi’nde sözlü bildiri olarak sunulmuştur.

#### 6. KAYNAKLAR

1. Lamb, H., 1921. Axisymmetric Vibration of Circular Plates in Contact with Water. Proceedings of The Royal Society (London) A, 98, 205–216.
2. McLachlan, N., 1932. The Accession to Inertia of Flexible Discs Vibrating in a Fluid. Proceedings of the Physical Society (London), 44, 546–555.
3. Amabili, M., Kwak, M., 1996. Free Vibrations of Circular Plates Coupled with Liquids: Revising the Lamb Problem. Journal of Fluids and Structures, 7, 743–761.
4. Kwak, H., Kim, K., 1991. Axisymmetric Vibration of Circular Plates in Contact with Water. Journal of Sound and Vibration, 146, 381–389.
5. Kwak, M., 1997. Hydroelastic Vibration of Circular Plates (Fourier-Bessel Series Approach). Journal of Sound and Vibration, 201, 293–303.
6. Athanassoulis, G., Mamis, K., 2012. An Onshore Hydro/piezo/electric System and its Application to Energy Harvesting from Sea Waves. The 2012 World Congress on Advances in Civil, Environmental and Materials Research (ACEM’ 12), 368–387.
7. Renzi, E., 2016. Hydro-electromechanical Modelling of a Piezoelectric Wave Energy Converter. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 472, 2195.
8. Cho, J., Jeong, S., 2017. Design of Hydro Electromagnetic and Piezoelectric Energy Harvesters for a Smart Water Meter System. Sensors and Actuators A: Physical, 261(1), 261–267.
9. Zakaria, H., Loon, C., 2018. The Application of Piezoelectric Sensor as Energy Harvester from Small-Scale Hydropower. International Conference on Civil and Environmental Engineering (ICCEE 2018), 65.
10. Huang, Y., Hsu, H., 2016. Solid-Liquid Coupled Vibration Characteristics of Piezoelectric Hydroacoustic Devices. Sensors and Actuators A: Physical, 238, 177–195.

11. Kuznetsova, I., Zaitsev, B., Borodina, I., 2011. Study of the Hydroacoustic Emitter Based on the Antisymmetric Lamb Wave in a Piezoelectric Ceramic Plate. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 56(11), 1382–1386.
12. Sharapov, V., Zhanna, S., Kunickaya, L., 2014. *Piezo-electric, Electro-Acoustic Transducers*, Springer, New York, USA.
13. Le, Q.L., Capsal, J.F., Lallart, M., Hebrard, Y., Ham, A.V.D., Reffe, N., Geynet, L., Cottinet, P.J., 2015. Review on Energy Harvesting for Structural Health Monitoring in Aeronautical Applications. *Progress in Aerospace*, 79, 147–157.
14. Akbarov, S.D., 2018. Forced Vibration of the Hydro-viscoelastic and -Elastic Systems Consisting of the Viscoelastic or Elastic Plate, Compressible Viscous Fluid and Rigid Wall: a Review. *Appl. Comput. Math.* 17(3), 221-245.
15. Ekicioğlu Küzeci, Z., 2020. *Piezoelektrik Levha, Viskoz Akışkan ve Rijit Duvardan Oluşan Sistemin Zorlanmış Titreşimi*. Doktora Tezi, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü.
16. Akbarov, S., Ismailov, M., Aliyev, A., 2017. The Influence of the Initial Strains of the Highly Elastic Plate on the Forced Vibration of the Hydro-Elastic System Consisting of this Plate, Compressible Viscous Fluid, and Rigid Wall. *Coupled System Mechanics*, 6(4), 287–316.