

## **Birinci Mertebe Kayma Deformasyon Teorisine Dayalı FD Düz Eksenli Kirişlerin Serbest Titreşim Analizi**

**Timuçin Alp ASLAN\*<sup>1</sup>, Ahmad Reshad NOORI<sup>2</sup>, Beytullah TEMEL<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Çukurova Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Adana  
<sup>2</sup>İstanbul Gelişim Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, İstanbul

Geliş tarihi: 19.09.2019

Kabul tarihi: 20.12.2019

### **Öz**

Bu çalışmada, birinci mertebe kayma deformasyon teorisine dayalı doğru eksenli fonksiyonel derecelenmiş (FD) malzemeli kirişlerin serbest titreşim özellikleri incelenmiştir. Malzeme özelliklerinin sadece kiriş kalınlığı boyunca değiştiği kabulü yapılmıştır. Malzeme değişim katsayısının, uzunluk/kalınlık oranlarının ve sınır koşullarının kirişlerin serbest titreşim davranışı üzerindeki etkileri de parametrik olarak incelenmiştir. Bu kirişlerin serbest titreşim davranışını idare eden hareket denklemleri, Timoshenko kiriş varsayımına dayalı minimum toplam enerji ilkesi kullanılarak elde edilmiştir. Kanonik halde elde edilen bu adi diferansiyel denklemler Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi (TFY) ile sayısal olarak çözülmüştür. Hesaplanan doğal titreşim frekansları, literatürdeki mevcut çalışmaların sonuçları ile karşılaştırılmış ve bunlarla uyum içerisinde olduğu gösterilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Fonksiyonel derecelenmiş malzeme, Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi, Serbest titreşim analizi

## **Free Vibration Analysis of FG Straight-Axis Beams Based on the First-Order Shear Deformation Theory**

### **Abstract**

In this work, the free vibration characteristics of functionally graded (FG) beams with straight-axis are investigated based on the first-order shear deformation theory (FSDT). It is assumed that the material properties change only through the thickness of the beam. The effects of the coefficient of variation, length/thickness ratios and boundary conditions on the free vibration behavior of the beams are also examined in a parametric manner. The equations of motion, governing the free vibration behavior of these beams are obtained using the principle of minimum total energy based on the Timoshenko's beam assumption. These ordinary differential equations (ODEs) obtained in the canonical form are solved numerically by the Complementary Functions Method (CFM). The calculated natural vibration frequencies are compared with the results of the existing studies in the literature and shown to be in agreement with them.

**Keywords:** Functionally graded materials, Complementary functions method, Free vibration analysis

---

\*Sorumlu (Corresponding author) yazar: Timuçin Alp ASLAN, [taslan@cu.edu.tr](mailto:taslan@cu.edu.tr)

## 1. GİRİŞ

FD kirişlerde malzeme özellikleri, belli bir fonksiyona bağlı olarak kirişin kalınlığı veya eksenini boyunca, yavaşça veya kademeli olarak değiştirilmesiyle elde edilmektedir. Bu tür kirişler çeşitli mühendislik uygulamalarında yapısal elemanlar olarak kullanılmaktadır. Servis ömrü boyunca çeşitli statik ve dinamik yüklerin etkisinde kalabilmektedir. Bu nedenle FD malzemeli kirişlerin statik ve dinamik davranışlarının incelenmesi yapı mekaniğinin en önemli araştırma konularından biridir.

Aydoğdu ve Taşkın [1], basit mesnetli FD malzemeli kirişin serbest titreşimini çeşitli yüksek mertebe ve klasik kiriş teorilerini kullanarak incelemiştir. Hareket denklemlerini Hamilton prensibi ile elde edip, Navier yöntemi yardımıyla kirişin doğal frekanslarını bulmuşlardır. Li [2], FD kirişlerin statik ve dinamik davranışlarını analiz etmek için yeni bir birleşik yaklaşım ileri sürmüştür. Dördüncü dereceden kısmi diferansiyel denklemi türetmiş ve problemin fiziksel niceliklerini bu denklemin çözümüyle elde etmiştir. Kirişin frekans denklemini belirleyerek serbest titreşim analizini yapmıştır. Sina ve arkadaşları [3], birinci mertebe kayma deformasyon yaklaşımından farklı yeni bir kiriş teorisi kullanarak, FD kirişlerin serbest titreşim frekanslarını elde etmiştir. Kirişte yanal normal gerilmelerin sıfır olduğunu varsayarak Hamilton prensipleri yardımıyla hareket denklemlerini türetmiştir. Analitik yöntemden faydalanarak serbest titreşim analizini idare eden diferansiyel denklemi çözmüştür. Çeşitli sınır koşulları ve farklı kiriş teorileri arasında karşılaştırılmalar yapmıştır. Şimşek [4], hareketli bir kütle ile yüklenebilir basit mesnetli FD kirişin titreşim davranışını Euler-Bernoulli, Timoshenko ve üçüncü mertebe kayma deformasyon teorilerinden faydalanarak incelemiştir. Kirişin malzeme özelliklerinin kalınlık boyunca sürekli olarak değiştiğini varsaymıştır.

Alshorbagy ve ark. [5], malzeme değişim katsayısına dayalı olarak, FD kirişin dinamik karakteristiği üzerine çalışmışlardır. Farklı malzeme dağılımları, çeşitli kalınlık oranları ve

sınır şartlarının kirişin dinamik karakteristiği üzerindeki etkilerine ait sayısal sonuçları çizelge ve grafik formunda sunmuşlardır. Ayrıca bu etkilerin kirişin dinamik davranışı üzerinde çok önemli rol oynadığını vurgulamışlardır. Sanjay ve arkadaşları [6], kirişlerin serbest titreşim analizini araştırmak için biri Euler-Bernoulli kiriş teorisine dayanan, diğeri Timoshenko kiriş teorisine dayanan iki ayrı sonlu eleman formülasyonu geliştirmişlerdir. Sonlu elemanlar yönteminin denklemlerini elde etmek için Virtüel iş prensibini kullanmışlardır. Thai ve Vo [7], literatürde bulunan çeşitli yüksek mertebe kayma deformasyonu teorilerini FD kirişlerin serbest titreşim analizlerinde kullanmışlardır. Göz önüne alınan teorilerde, kiriş yüksekliği boyunca kayma şekil değiştirmesinin yüksek mertebe değişimi dikkate alınmaktadır. Pradhan ve Chakraverty [8], analizlerini klasik ve birinci mertebeden kayma deformasyon kiriş teorilerine dayandırmaktadırlar. Kalınlık boyunca malzeme özellikleri değişen kiriş kesitlerinin yer değiştirme bileşenlerini gösteren deneme fonksiyonları, basit cebirsel polinom formlarında ifade edilmiştir. Temel denklemleri Rayleigh-Ritz metodu ile elde etmişlerdir.

Nguyen ve arkadaşları [9], eksenel yüklü kirişlerin statik ve serbest titreşimleri için birinci mertebe kayma deformasyon teorisini geliştirmişlerdir. Bu teoride, geliştirilen enine kayma rijitliğini, düzlem içi gerilme ve denge denklemlerinden elde etmiş ve böylece ilişkili kayma düzeltme faktörünü daha sonra analitik olarak elde etmişlerdir. Hareket denklemleri Hamilton ilkesinden türetilmiştir. Analitik çözümlerini, basit mesnetli FD kirişler için sunmuşlardır. Su ve arkadaşları [10] ise, FD kirişlerin serbest titreşim davranışını araştırmak için dinamik rijitlik matrisini geliştirmişlerdir. Serbest titreşimler için, Hamilton ilkesi yardımıyla hareket ve doğal sınır koşullarının temel denklemlerini türetmişler ve harmonik salınım için diferansiyel denklemleri kapalı formda çözmüşlerdir. Pradhan ve Chakraverty [11], kirişlerin farklı sınır şartları için farklı kayma deformasyon teorilerinin, serbest titreşim değerleri üzerindeki etkilerini incelemiştir. Su ve Banerjee [12], FD Timoshenko kirişlerin serbest titreşim frekanslarını, problemin dinamik rijitlik matrisini elde ederek araştırmışlardır. Hareketin

diferansiyel denklemleri çözülmüş ve eksenel kuvvet, kayma kuvveti ve eğilme momenti için ifadeler türetilmiştir. Jing ve arkadaşları [13], FD malzemeli kirişlerin statik ve serbest titreşim davranışını analiz etmek için merkezi sonlu hacim yöntemi ve Timoshenko kiriş teorisi kombinasyonuna dayanan yeni bir yaklaşım geliştirmişlerdir. Düzgün yayılı yük altında FD kiriş için, Hamilton prensibi kullanılarak, genel dinamik denklemleri türetilmiştir. Bu denklemler, statik eğilme problemi veya serbest titreşim problemi için basitleştirilmiştir. Avcar ve Alwan [14], Rayleigh kiriş teorisini kullanarak sabit mesnetli FD kirişin serbest titreşim analizini yapmışlardır. Lee ve Lee [15], Euler-Bernoulli kirişlerinin serbest titreşim davranışlarını transfer matrisi metoduyla incelemiştir. Yazarlar, kirişin iki ucunda sınır şartları arasında bir ilişki kurarak FD malzemeli kiriş için kesin transfer matrisini elde etmişlerdir. Malzeme özelliklerinin yükseklik boyunca kuvvet fonksiyonu şeklinde değiştiği durumlarda, problemin doğal frekansları ve mod şekillerinin hesabında bu metodun gayet kullanışlı olduğunu ifade etmişlerdir. Kahya ve Turan [16], FD kirişlerin serbest titreşim ve burkulma analizleri için birinci mertbe kiriş teorisine dayanan, beş düğüm noktalı ve on serbestlik dereceli bir sonlu eleman önermişlerdir. Turan ve Kahya [17] çalışmalarında, birinci mertbe kayma deformasyonu teorisine dayalı olarak FD kirişlerin doğal frekanslarını Navier çözüm yöntemi ile elde etmişlerdir. Hareket denklemlerini Lagrange eşitlikleri ile türetmiş, problemin çözümünde ise trigonometrik fonksiyonları kullanmışlardır.

Banerjee ve Ananthapurajah [18], FD kirişlerin veya çerçevelerin serbest titreşim analizi için dinamik rijitlik matrisi yöntemini uygulamıştır. Dinamik rijitlik matrisinde kuvvetlerin genliklerini kirişin iki ucundaki yer değiştirmeler ile ilişkilendirilerek formüle etmişler ve çözüm için Wittrick-Williams algoritmasını kullanmışlardır. Çelebi ve arkadaşları [19], düzlemsel elastisite teorisine ait hareket denklemlerini kullanarak, basit mesnetli FD yüksek kirişlerin serbest titreşim frekanslarını hesaplamışlardır. Çalışmada, denklemleri daha basit hale getirmek için değişkenlere ayırmışlar ve hareket denklemlerinin TFY yardımıyla çözümüne olanak sağlamışlardır.

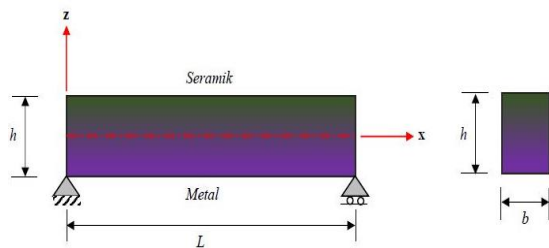
Yapılan araştırmalara göre, doğru eksenli kirişlerin çeşitli statik ve dinamik yüklemeler altındaki çözümlerinin birçok farklı yöntemle ele alındığı görülmüştür. Yazarların bilgisine göre, kalınlık boyunca FD malzemeli, doğru eksenli Timoshenko kirişlerinin serbest titreşim davranışını TFY ile inceleyen herhangi bir çalışmaya rastlanılmamıştır. Bu tür kirişlerin serbest titreşim davranışları, ilk defa bu çalışmada TFY ile analiz edilmiştir. FD çubukların serbest titreşim davranışını idare eden kanonik denklemler birinci mertbe kayma deformasyon teorisine dayalı minimum toplam enerji prensibi ile elde edilmiştir. Timoshenko kirişlerinin doğal titreşim frekanslarını hesaplamak için Fortran dilinde bir bilgisayar programı yazılmıştır. Bu çalışmada malzeme değişim katsayısının, farklı sınır koşullarının ve kiriş boy-kalınlık oranlarının serbest titreşim frekansları üzerindeki etkileri detaylı bir şekilde araştırılmıştır.

Bu çalışmanın temel amacı, kalınlık boyunca FD malzemeli Timoshenko kirişlerinin beklenen davranışını belirlemekle birlikte, bu metodun etkin ve kolayca uygulanabilirliğini de göstermektir.

## 2. MATERYAL VE METOT

Şekil 1’de görülen düz eksenli FD kirişin elastisite modülü,  $E(z)$  ve kütleli yoğunluğu,  $\rho(z)$ ’nin kiriş kalınlığı boyunca üstel olarak değiştiği kabulü yapılmıştır. Dolayısıyla malzeme özellikleri,  $z$  koordinatının fonksiyonlarıdır. Malzeme değişim fonksiyonu Eşitlik 1’de verilmektedir.

$$P(z) = (P_t - P_b) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{nz} - P_b \quad (1)$$



Şekil 1. FD malzemeli kiriş ve enkesiti

Burada  $P(z)$ , malzeme özelliklerini ifade etmektedir.  $n_z$  ise, malzemeye ait hacim oranının kiriş kalınlığı boyunca dağılımını belirleyen malzeme değişim katsayısıdır. Timoshenko kiriş teorisine göre  $U_x$  ve  $U_z$  eksenel ve düşey yer değiştirmeleri,  $\varepsilon_x$ ,  $x$  doğrultusundaki eksenel,  $\gamma_{xz}$  ise açılmal şekil değiştirmeleri göstermekte olup, Eşitlik 2, 3, ve 4'te verilmektedir.

$$U_x = u(x, t) + z \theta(x, t) ; U_z = w(x, t) \quad (2)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x} = u' + z \theta' \quad (3)$$

$$\gamma_{xz} = \theta + w' \quad (4)$$

İç kuvvetler ve gerilmeler arasındaki ilişki Eşitlik 5, 6 ve 7'deki gibi verilmektedir.

$$N_x = b \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x dz = b \int_{-h/2}^{+h/2} E(x, z) (\varepsilon_x) dz \quad (5)$$

$$M_x = b \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz = b \int_{-h/2}^{+h/2} E(x, z) (\varepsilon_x) z dz \quad (6)$$

$$Q_z = b \int_{-h/2}^{+h/2} k_s \tau_{xz} dz = b \int_{-h/2}^{+h/2} k_s \frac{E(x, z)}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} dz \quad (7)$$

Yukarıdaki denklemlerde verilen kesit tesirlerinin açılımı ise Eşitlik 8, 9 ve 10'da gösterilmiştir.

$$N_x = b (A_{11} u' + A_{12} \theta') \quad (8)$$

$$Q_z = b A_{33} (\theta + w') \quad (9)$$

$$M_x = b (A_{12} u' + A_{22} \theta') \quad (10)$$

Burada  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{22}$  ve  $A_{33}$  kesit rijitlik sabitlerini ifade etmekte olup, aşağıda verilmiştir.

$$A_{11} = \int_{-h/2}^{+h/2} E(x, z) dz \quad (11)$$

$$A_{12} = \int_{-h/2}^{+h/2} E(x, z) z dz \quad (12)$$

$$A_{22} = \int_{-h/2}^{+h/2} E(x, z) z^2 dz \quad (13)$$

$$A_{33} = k_s \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{E(x, z)}{2(1+\nu)} dz \quad (14)$$

FD çubuklar için kinetik enerji ve toplam potansiyel enerji ifadeleri, 15 ve 16 integralleri ile bulunmaktadır.

$$\Pi_t = \int_0^l \int_A \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dA dx \quad (15)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \int_A \rho(x, z) (\dot{U}_x^2 + \dot{U}_z^2) dA dx \quad (16)$$

Burada  $\rho$ , kütleli yoğunluğu,  $\dot{U}_x$  ve  $\dot{U}_z$  ise sırasıyla, kiriş üzerindeki bir noktanın hızının  $x$  (boyuna) ve  $z$  (düşey) bileşenleridir.

Kinetik enerjiden ve potansiyel enerjiyi çıkararak Sistemin Lagrangian'ı elde edilmektedir.

$$L = T - \Pi_t$$

$$L = l b \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{1}{2} \rho(x, z) (\dot{u}^2 + 2 z \dot{u} \dot{\theta} + \dot{\theta}^2 z^2 + \dot{w}^2) - \left[ \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xz} \gamma_{xz}) \right] dz \quad (17)$$

Hamilton Prensipleri ise, Lagrangian'ın zamana göre integralinin varyasyonunu sıfır yapan varsayımdır.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0 \quad (18)$$

Gerekli büyüklüklerin impulsif bileşenleri ve türevleri teşkil edilerek, FD malzemeli doğru eksenli kirişlere ait kısmi diferansiyel denklemler (19-24) elde edilmiştir. Burada  $I_0$ ,  $I_1$  ve  $I_2$ , kütleli atalet momentleridir.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{A_{12}M_x - A_{22}N_x}{b(A_{12}^2 - A_{11}A_{22})}$$

(19) parametresi olup, kompleks bir sayıdır. Serbest titreşim analizleri için Laplace parametresi ‘s’, serbest titreşim parametresi “iω” ile değiştirilmiştir. (25-30) eşitlikleri aşağıdaki gibi matris formunda yazılabilir.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{Q_z}{b k_s A_{33}} - \theta$$

(20)

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-A_{11}M_x + A_{12}N_x}{b(A_{12}^2 - A_{11}A_{22})}$$

(21)  $\frac{d\{Y(x, \omega)\}}{dx} = F(x, \omega)Y^*(x)$  (31)

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

(22)

$$\frac{\partial Q_z}{\partial x} = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

(23)

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = Q_z + I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

(24)

$$\{Y(x, \omega)\} = \sum_{m=1}^6 C_m [U^{(m)}(x, \omega)] \quad (32)$$

Sistem hareket eşitliklerinin (19-24) Laplace dönüşümü alınrsa, kısmi diferansiyel denklemler dönüşmüş uzayda adi diferansiyel denklem takımı haline dönüşmektedir. Böylece, Laplace uzayında FD çubukların davranışını idare eden adi diferansiyel denklem takımı, kanonik formda aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = \frac{A_{12}\bar{M}_x - A_{22}\bar{N}_x}{b(A_{12}^2 - A_{11}A_{22})}$$

(25)

$$\frac{d\bar{w}}{dx} = \frac{\bar{Q}_z}{b k_s A_{33}} - \bar{\theta}$$

(26)

$$\frac{d\bar{\theta}}{dx} = \frac{-A_{11}\bar{M}_x + A_{12}\bar{N}_x}{b(A_{12}^2 - A_{11}A_{22})}$$

(27)

$$\frac{d\bar{N}_x}{dx} = I_0 s^2 \bar{u} + I_1 s^2 \bar{\theta}$$

(28)

$$\frac{d\bar{Q}_z}{dx} = I_0 s^2 \bar{w}$$

(29)

$$\frac{d\bar{M}_x}{dx} = \bar{Q}_z + I_1 s^2 \bar{u} + I_2 s^2 \bar{\theta}$$

(30)

Burada (̄) ile gösterilen ifadeler büyüklüklerin Laplace Dönüşümünü göstermektedir. s, Laplace

Burada  $C_m$ , integrasyon sabitleri sınır şartlarından elde edilmektedir. Bu sabitler elde edilirken sınır şartları kullanılarak bir takım denklemler oluşturulur ve katsayılar matris formunda yazılır. Böylece katsayılar matrisinin determinantını sıfır yapan değerler serbest titreşim frekanslarını vermektedir. TFY ile sistemin kütle ve rijitlik matrisleri ayrı ayrı elde edilemediğinden, problemin öz vektörleri hesaplanmamaktadır.

Bunun yanı sıra, bu çalışmada önerilen yaklaşım Eşitlik 1 ile verilen malzeme değişim fonksiyonu ile sınırlı olmayıp, çeşitli malzeme değişim modelleri için de kolayca uygulanabilmektedir.

### 3. SAYISAL UYGULAMALAR

Bu çalışmada, çeşitli malzeme derecelenme indisi ve farklı boy-kalınlık (L/h) oranları için farklı sınır şartlarına sahip FD kirişlerin boyutsuz serbest titreşim frekansları hesaplanmıştır. Çözümler için Fortran dilinde bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. TFY'ne dayalı başlangıç değer probleminin çözümü için 5. Mertebe Runge-Kutta (RK5) algoritması kullanılmıştır [20-21].

Çözümlerde Çizelge 1'de verilen malzeme sabitleri kullanılmıştır.

**Çizelge 1.** Malzemelerin mekanik özellikleri

Malzeme	$E$ (Gpa)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
Alüminyum ( $P_b$ )	70	2702
Seramik ( $P_r$ )	380	3960

Ele alınan FD kirişe ait geometrik özellikler şöyledir: kesit genişliği 0,1 m, yüksekliği 0,1 m ve kayma düzeltme faktörü 5/6 olarak alınmıştır.

Hesaplanan frekans değeri aşağıdaki ifade ile boyutsuz hale getirilmiştir.

$$\lambda = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_b}{E_b}} \quad (33)$$

Bu çalışmada, ilk olarak farklı boy/kalınlık oranları için ankastre-ankastre sınır şartlarına sahip FD kirişin boyutsuz frekansları elde edilmiştir. Bu çalışmada bulunan sonuçlar ve literatürde verilen değerler Çizelge 2’de karşılaştırılmıştır. Çizelge incelendiğinde, FD malzemeli kirişler için bu çalışmada elde edilen boyutsuz serbest titreşim frekanslarının literatürde verilen boyutsuz frekanslar ile uyum içerisinde olduğu görülmüştür.

**Çizelge 2.** Boyutsuz frekans değerleri

$n_z$	Mod	$L/h=5$		$L/h=20$	
		Li [2]	Bu çalışma	Li [2]	Bu çalışma
		1	4,266	4,255	4,517
5		3,754	3,744	4,023	4,009

Farklı sınır şartlarının ve farklı boy-kalınlık ( $L/h$ ) oranlarının FD kirişlerin frekansları üzerindeki etkilerini araştırmak için parametrik çalışmalar yapılmıştır. Ankastre-Ankastre (A-A), Sabit-Sabit (S-S), Ankastre-Sabit (A-S), ve Ankastre-Serbest (A-Se) sınır şartlarına sahip kirişler için ilk beş boyutsuz frekans değerleri hesaplanmış ve sırasıyla Çizelge (3-6)’da verilmektedir.

**Çizelge 3.** Ankastre-Ankastre sınır şartlarına ait boyutsuz frekans değerleri

$L/h$	Mod	$n_z$			
		0 (Seramik)	1	5	(Metal)
5	1	9,9975	7,9001	6,6425	5,1946
	2	22,8843	18,3024	15,0799	11,8905
	3	30,2314	25,2962	19,8529	15,7080
	4	38,1387	30,7064	25,0468	19,8165
	5	54,4934	44,0746	35,7270	28,3143

20	1	12,2201	9,4297	8,1682	6,3495
	2	32,9705	25,5056	22,0119	17,1312
	3	62,8988	48,7987	41,9286	32,6817
	4	100,6726	78,3502	66,9873	52,3086
	5	120,9255	101,4368	79,8102	62,8319

**Çizelge 4.** Sabit-sabit sınır şartlarına ait boyutsuz frekans değerleri

$L/h$	Mod	$n_z$			
		0 (Seramik)	1	5	(Metal)
5	1	5,1525	4,2550	3,7443	2,6772
	2	17,8711	13,7665	11,4730	9,2857
	3	30,2314	24,8023	19,4259	15,7080
	4	34,1449	27,0207	22,3860	17,7414
	5	51,8131	41,6357	34,1676	26,9217
20	1	5,4603	4,5024	4,0092	2,8371
	2	21,5732	16,6140	14,3803	11,2092
	3	47,5921	37,0334	32,0637	24,7285
	4	82,4397	63,4079	54,1806	42,8350
	5	120,9255	97,0143	78,6711	62,8319

**Çizelge 5.** Ankastre-sabit sınır şartlarına ait boyutsuz frekans değerleri

$L/h$	Mod	$n_z$			
		0 (Seramik)	1	5	(Metal)
5	1	7,4652	5,9047	5,0414	3,8788
	2	20,4884	16,1541	13,3985	10,6456
	3	30,2314	24,9074	19,5371	15,7080
	4	36,2214	29,0911	23,8821	18,8203
	5	53,2075	42,8104	34,8866	27,6462
20	1	8,4814	6,6185	5,7693	4,4068
	2	27,0276	20,9361	18,1251	14,0433
	3	55,0737	42,6640	36,7500	28,6159
	4	91,4633	70,8796	60,6328	47,5236
	5	120,9255	99,7341	78,8275	62,8319

**Çizelge 6.** Ankastre-Serbest sınır şartlarına ait boyutsuz frekans değerleri

$L/h$	Mod	$n_z$			
		0 (Seramik)	1	5	(Metal)
5	1	1,8944	1,4628	1,2643	0,9843
	2	10,2025	7,9720	6,7245	5,3011
	3	15,1157	12,7061	10,0311	7,8540
	4	24,2839	19,1882	15,9506	12,6177
	5	40,3168	32,1235	26,3757	20,9483
20	1	1,9495	1,5011	1,3039	1,0130
	2	12,0753	9,3087	8,0687	6,2742
	3	33,2016	25,6401	22,1548	17,2513
	4	60,4627	49,0520	39,8691	31,4159
	5	63,4443	50,7989	42,3371	32,9651

Çizelgeler incelendiğinde, en büyük doğal frekanslarının,  $n_z = 0$  için, yani kirişin seramik olması durumunda ortaya çıktığı,  $n_z$  arttıkça doğal frekansların azaldığı görülmektedir. Farklı sınır

şartlarına ait çizelgeler incelendiğinde, ilk olarak tüm mesnet türlerinde  $L/h$  oranı arttıkça frekans değerlerinin arttığı görülmüştür. En büyük boyutsuz doğal titreşim frekans değeri A-A mesnet türünde, en küçük frekans değeri ise A-Se girişinde görülmüştür.

#### 4. SONUÇLAR

Bu araştırmada, kalınlık boyunca FD malzemeli çubukların birinci mertebeye kayma deformasyon teorisine dayalı serbest titreşim analizleri yapılmıştır. Frekans uzayında elde edilen adi diferansiyel denklemler, TFY'ne dayalı başlangıç değer probleminin çözümleri için RK5 algoritması kullanılmıştır. Ele alınan problem, önerilen yöntem ile çözülmüş ve sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Elde edilen değerlerin bir birleri ile uyum içerisinde oldukları görülmüştür. Ayrıca, malzeme değişim katsayısının, farklı sınır şartlarının ve farklı boy-kalınlık oranlarının probleminin doğal titreşim frekanslarını önemli ölçüde etkilediği gözlemlenmiştir.

Tekrar belirtmek gerekirse sunulan yaklaşımda, bu çalışmada kullanılan malzeme modeli yerine, istenirse farklı malzeme modelleri de kolayca uygulanabilmektedir. Bu çalışmanın temel amacı, kalınlık boyunca FD malzemeli düz eksenli Timoshenko girişlerinin beklenen davranışını teyit etmekle beraber, bu metodun etkin ve kolayca uygulanabilirliğini de göstermektir.

#### 5. KAYNAKLAR

1. Aydoğdu, M., Taşkın, V., 2007. Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams with Simply Supported Edges. *Materials & Design*, 28(5), 1651-1656.
2. Li, X.F., 2008. A Unified Approach for Analyzing Static and Dynamic Behaviors of Functionally Graded Timoshenko and Euler-bernoulli Beams. *Journal of Sound and Vibrations*, 318, 1210-1229.
3. Sina, S.A., Navazi, H.M., Haddadpour, H., 2009. An Analytical Method for Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams. *Materials and Design*, 30(3), 741-747.
4. Şimşek, M., 2010. Vibration Analysis of a Functionally Graded Beam Under a Moving Mass by Using Different Beam Theories. *Composite Structures*, 92, 904-917.
5. Alshorbagy, A.E., Eltahir, M.A., ve Mahmoud, F.F., 2011. Free Vibration Characteristics of a Functionally Graded Beam by Finite Element Method. *Applied Mathematical Modelling*, 35, 412-425.
6. Anandrao, K.S., Gupta, R.K., Ramachandran, P., Rao, G.V., 2012. Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams. *Defence Science Journal*, 62(3), 139-146.
7. Thai, H.T., Vo, T.P., 2012. Bending and Free Vibration of Functionally Graded Beams Using Various Higher-order Shear Deformation Beam Theories. *International Journal of Mechanical Sciences*, 62(1), 57-66.
8. Pradhan, K.K., Chakraverty, S., 2013. Free Vibration of Euler and Timoshenko Functionally Graded Beams by Rayleigh-ritz Method. *Composites: Part B*, 51, 175-184.
9. Nguyen, T.K., Vo, T.P., Thai, H.T., 2013. Static and Free Vibration of Axially Loaded Functionally Graded Beams Based on the First-order Shear Deformation Theory. *Composites: Part B*, 55, 147-157.
10. Su, H., Banerjee, J.R., Cheung, C.W., 2013. Dynamic Stiffness Formulation and Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams. *Composite Structures* 106, 854-862.
11. Pradhan, K.K., Chakraverty, S., 2014. Effects of Different Shear Deformation Theories on Free Vibration of Functionally Graded Beams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 82, 149-160.
12. Su, H., Banerjee, J.R., 2015. Development of Dynamic Stiffness Method for Free Vibration of Functionally Graded Timoshenko Beams. *Computers and Structures* 147, 107-116.
13. Jing, L.L., Ming, P.J., Zhang, W.P., Fu, L.R., Cao, Y.P., 2016. Static and Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams by Combination Timoshenko Theory and Finite Volume Method. *Composite Structures*, 138, 192-213.
14. Avcar, M., Alwan, H.H.A., 2017. Free Vibration of Functionally Graded Rayleigh

- Beam. *International Journal of Engineering & Applied Sciences (IJEAS)*, 9(2), 127-137.
15. Lee, J.W., Lee, J.Y., 2017. Free Vibration Analysis of Functionally Graded Bernoulli-euler Beams Using an Exact Transfer Matrix Expression. *International Journal of Mechanical Sciences*, 122, 1-17.
  16. Kahya, V., Turan, M., 2017. Finite Element Model for Vibration and Buckling of Functionally Graded Beams Based on the First-order Shear Deformation Theory. *Composites Part B: Engineering*, 109, 108-115.
  17. Turan, M., Kahya, V., 2018. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Kirişlerin Serbest Titreşim Analizi. *Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi*, 8(2), 119-130, DOI: 10.31466/kfbd.453833
  18. Banerjee, J.R., Ananthapuvirajah, A., 2018. Free Vibration of Functionally Graded Beams and Frameworks Using the Dynamic Stiffness Method. *Journal of Sound and Vibration*, 422, 34-47.
  19. Çelebi, K., Yarım pabuç, D., Tütüncü, N., 2018. Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams Using Complementary Functions Method. *Arch. Appl. Mech.*, 88(5), 729-739.
  20. Aslan, T.A., Noori, A.R., Temel, B., 2018. Dynamic Response of Viscoelastic Tapered Cycloidal Rods. *Mechanics Research Communications*, 92, 8-14.
  21. Noori, A.R., Aslan, T.A., Temel B., 2018. An Efficient Approach for In-plane Free and Forced Vibrations of Axially Functionally Graded Parabolic Arches With Nonuniform Cross Section. *Composite Structures*, 200(15), 701-710.